Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria da Graça da Silva Nogueira Magalhães

A argumentação matemática na resolução de tarefas com a utilização da calculadora gráfica: Experiência numa turma do 11.º ano

Outubro de 2010

A argumentação matemática na resolução de tarefas com a utilização da calculadoragráfica: Experiência numa turma do 11.º ano

Maria da Graça da Silva Nogueira Magalhães

UMinho|2010

Universidade do Minho
Instituto de Educação

Maria da Graça da Silva Nogueira Magalhães

A argumentação matemática na resolução de tarefas com a utilização da calculadora gráfica: Experiência numa turma do 11.º ano

Mestrado em Ciências da Educação
Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática

Trabalho realizado sob a orientação da
Professora Doutora Maria Helena Martinho

Outubro de 2010

Declaração

Nome: Maria da Graça da Silva Nogueira Magalhães

Endereço electrónico: graca.n.magalhaes@gmail.com

Telefone: 934079738

Número do Bilhete de Identidade: 8077181

Título da tese:

A argumentação matemática na resolução de tarefas com a utilização da calculadora gráfica: Experiência numa turma do 11.º ano

Orientadora:

Professora Doutora Maria Helena Martinho

Ano de conclusão: 2010

Mestrado em Ciências da Educação, Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática

Universidade do Minho, 29 de Outubro de 2010

Para o Adriano

a Adriana,

o Diogo

e o Gonçalo

Agradecimentos

À minha orientadora, Doutora Maria Helena Martinho, por todo o seu apoio e dedicação e pelos seus comentários, sugestões e desafios colocados, que se tornaram fundamentais para a execução e conclusão deste trabalho.

Aos alunos da minha turma do 11.º ano, que participarem na execução deste projecto, pela sua motivação, empenho e entusiasmo que sempre demonstraram.

Aos meus pais, pelo apoio que sempre me deram.

Ao Diogo e à Adriana que cresceram durante estes dois anos a aprender a ser pacientes e compreensivos com a mãe que apesar de tudo teve sempre algum tempo para os miminhos do dia.

Ao Adriano por todo o sua amizade, carinho e ...

A ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS COM A UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA GRÁFICA: EXPERIÊNCIA NUMA TURMA DO 11.º ANO

Maria da Graça da Silva Nogueira Magalhães
Mestrado em Ciências da Educação, Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática
Universidade do Minho, 2010

Resumo

Esta investigação tem como objectivo compreender o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente, de uma turma do 11.º ano, ao longo da realização de uma sequência de tarefas com a utilização da calculadora gráfica. Pretende também estudar o contributo da calculadora gráfica no desenvolvimento dessa capacidade. A sequência de tarefas foi seleccionada com o intuito de que cada tarefa fosse adequada ao nível cognitivo dos alunos, desafiando-os intelectualmente. Assim, com a presente investigação pretende-se responder às seguintes questões: a) Como evoluiu a capacidade de argumentar matematicamente, dos alunos de uma turma do 11.º ano ao longo da realização de uma sequência de tarefas?; e b) De que forma a utilização da calculadora gráfica pode contribuir para o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente, dos alunos de uma turma do 11.º ano?

Este estudo tem como suporte teórico, duas áreas distintas: a argumentação em Matemática e a calculadora gráfica. Na primeira, a professora investigadora procura centrar-se nas características e significados da argumentação em matemática e na argumentação desenvolvida na sala de aula. Na segunda área, para além de inicialmente se efectuar uma resenha histórica sobre a evolução da calculadora gráfica, seguem-se algumas situações da sua utilização na sala de aula e finalmente particulariza-se essa utilização no tema das funções que constitui um dos objectivos primordiais deste trabalho.

A metodologia adoptada é de carácter qualitativo e descritivo e o caso a ser estudado é a turma do 11.º em que a professora investigadora lecciona a disciplina de Matemática A. A recolha e análise de dados, neste estudo, contempla as discussões desenvolvidas inicialmente em pequeno grupo e posteriormente em grupo turma, e finalmente os relatórios individuais escritos com as respectivas reflexões críticas e autocríticas sobre as tarefas desenvolvidas na sala de aula. Com a presente investigação é possível concluir que o trabalho colaborativo com recurso à calculadora gráfica, ajudou a desenvolver nos alunos a capacidade de raciocinar e de argumentar matematicamente. Verificou-se que a interacção entre alunos durante a exploração da sequência de tarefas foi promotora de uma aprendizagem significativa. O facto do tipo de tarefas implementadas ter sido de investigação desencadeou nos alunos uma necessidade de argumentar matematicamente para que as suas conjecturas fossem validadas por todos os elementos do grupo. Relativamente à utilização da calculadora gráfica verificou-se que os alunos recorreram sistematicamente à utilização deste artefacto sempre que sentiram a necessidade de verificar a validade das suas conjecturas. Foi também observado que a utilização da calculadora gráfica possibilitou e incentivou os alunos a argumentarem de forma crítica relativamente às possíveis soluções das tarefas.

Palavras-chave:
Argumentação matemática, tarefas e calculadora gráfica.

THE MATHEMATICAL ARGUMENTATION IN THE RESOLUTION OF TASKS USING THE GRAPHIC CALCULATOR: EXPERIMENT IN AN 11th YEAR CLASS

Maria da Graça da Silva Nogueira Magalhães
Master's degree in Science Education, Area of Specialization in Pedagogic Supervision in Mathematics Education
University of Minho, 2010

Abstract

The aim of this investigation was to understand the development of the capacity of arguing mathematically throughout the execution of a sequence of tasks with the use of the graphic calculator in an 11th year class. It also intended to study the contribution of the graphic calculator in the development of this capacity. The sequence of tasks was selected so that each one would meet the cognitive level of the pupils, challenging them intellectually. So, with the present investigation one intends to answer the following questions: a) How did their capacity of arguing mathematically evolve during the realization of a sequence of tasks? and b) How can the use of the graphic calculator contribute to the development of the pupils' capacity of arguing mathematically?

This study has theoretical support in two different areas: the argumentation in Mathematics and the graphic calculator. In the first one, the investigative teacher tries to focus on the characteristics and meanings of the argumentation in mathematics and in the argumentation developed in the classroom. In the second area, a previous historical review on the evolution of the graphic calculator is followed by the presentation of some situations of its use in the classroom and finally its specific use with functions, which constitutes one of the main objectives of this work.

The methodology adopted is qualitative and descriptive and the case to be studied is an 11th year class, in which the investigative teacher teaches Mathematics A. The gathering and analysis of data, in this study, contemplates the discussions developed initially in small groups and afterwards in the whole class, and finally the individual reports written with the respective critical analysis on the tasks developed in the classroom.

With the present investigation, one may conclude that the collaborative work with the use of the graphic calculator, helped to develop in the pupils the capacity of reasoning and of arguing mathematically. It made clear that the interaction between pupils during the exploration of the sequence of tasks promoted a significant apprenticeship. The fact that the type of implemented tasks were based on investigation unleashed in the pupils a necessity of arguing mathematically so that their conjectures were validated by all the elements of the group. About the use of the graphic calculator, it was verified that the pupils resorted systematically to the use of this device whenever they felt the necessity of checking the validity of their hypothesis. It was also observed that the use of the graphic calculator made possible and stimulated the pupils to argue critically on the possible solutions to the tasks.

Keywords
Mathematical argumentation, tasks, graphic calculator.

Índice

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

CAPÍTULO 1

Introdução

Neste capítulo é apresentado o objectivo da experiência realizado numa turma do 11.º ano, em que se procurou desenvolver a capacidade de argumentação em Matemática dos alunos, recorrendo à calculadora gráfica para a resolução de uma sequência de tarefas. Apresenta-se de seguida o objectivo do estudo bem como as questões de investigação. Posteriormente é apresentada a temática e a sua relevância em termos de investigação. Por fim, é apresentada a organização do estudo.

1.1. Objectivo e questões do estudo

A teoria da educação sofreu vários avanços nos últimos tempos, mudando o foco da investigação do pensador individual para uma pessoa que participa como membro de uma comunidade (Forman, Larreamendy-Joeens, Stein & Brown, 1998). Este ponto de vista está presente nos escritos da filosofia da ciência que defendem a importância das normas e das práticas sociais da comunidade científica na validação das suas teorias. Ou seja, a aceitação das explicações em domínios científicos baseiam-se não apenas em critérios lógicos ou empíricos, mas no facto de ser um argumento capaz de persuadir os outros membros da comunidade. A matemática não pode ser mais vista como uma actividade puramente individual mas sim como uma actividade social.

Forman et al. (1998) consideram que o desenvolvimento de pesquisas educacionais sobre a argumentação colectiva na sala de aula pode fornecer uma forma de compreender como ajudar os alunos a apropriarem-se desta prática científica crucial. Os alunos ao desenvolverem actividades de argumentação matemática são responsabilizados a fundamentar os seus raciocínios, a descobrir o porquê de determinados resultados ou situações e são incentivados a entender os argumentos dos restantes elementos da turma (Boavida, Gomes & Machado, 2002). Quando os alunos argumentam matematicamente não só partilham as suas respostas como explicam e justificam as suas ideias e a forma como pensaram e resolveram a tarefa proposta

(Ponte & Serrazina, 2000; Whitenack & Yackel, 2008). Os alunos ao serem desafiados a organizar e a clarificar as suas ideias, quer oralmente quer por escrito, desenvolvem a capacidade de argumentar em Matemática. Torna-se, assim, fundamental que as tarefas propostas aos alunos sejam interessantes e desafiadoras de modo a desenvolverem o raciocínio estimulando a comunicação e a argumentação em Matemática (Ponte & Serrazina, 2000; Whitenack & Yackel, 2008).

Quando se realizam tarefas de investigação, proporciona-se aos alunos uma oportunidade para mostrarem os seus raciocínios facilitando a interacção entre o professor-aluno e a comunicação na sala de aula (Cai, Lane & Jakabcsin, 1996). Pois, como refere Perrenoud (2003), "para aprender é preciso confrontar-se com obstáculos cognitivos ao mesmo tempo reais e ultrapassáveis" (p.115), os obstáculos proporcionam a aprendizagem pois sem algum desconforto cognitivo a aprendizagem não ocorre. No entanto, a tarefa deve estar ao alcance de quem a vai executar. Assim, é importante que nas aulas de matemática os alunos enfrentem tarefas diversificadas e adequadas ao seu nível cognitivo. Ao mesmo tempo, importa que seja estimulada a capacidade de reflexão do aluno sobre as próprias aprendizagens (Campos, Neves, Fernandes, Conceição & Alaiz, 1995).

Com a introdução da tecnologia nas aulas de Matemática criaram-se novas oportunidades potenciadoras de uma aprendizagem através do envolvimento activo dos alunos, no entanto, pouca consideração tem sido dada às implicações pedagógicas da tecnologia como um mediador da aprendizagem da Matemática (Rocha, 2000, 2001). Existe ainda pouca investigação focada na forma como os alunos efectivamente usam a calculadora gráfica e as suas atitudes face a este instrumento e mais precisamente à disciplina de Matemática (Rocha, 2000, 2001). A tecnologia pode facilitar a colaboração e discussão dos alunos quer em pequenos grupos quer em grupo turma quando partilham e testam os seus raciocínios matemáticos, nomeadamente, com o auxílio do computador, da calculadora gráfica e do quadro interactivo.

Este estudo tem assim como objectivo compreender o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente ao longo da realização de uma sequência de tarefas com a utilização da calculadora gráfica. Pretende-se ainda estudar o contributo da calculadora gráfica no desenvolvimento dessa capacidade. A sequência de tarefas foi seleccionada com o intuito de que cada tarefa fosse adequada ao nível cognitivo dos alunos, desafiando-os intelectualmente.

Assim, com a presente investigação pretende-se responder às seguintes questões:

a) Como evolui a capacidade de argumentar matematicamente, dos alunos de uma turma do 11.º ano ao longo da realização de uma sequência de tarefas?

b) De que forma a utilização da calculadora gráfica pode contribuir para o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente, dos alunos de uma turma do 11.º ano?

1.2. Importância do estudo

Na última década o desenvolvimento das capacidades argumentativas nos alunos tornou-se um assunto discutido e trabalhado pela comunidade matemática por diferentes razões, nomeadamente, a necessidade de uma abordagem precoce das habilidades relevantes no processo de prova, a exploração do potencial de interacção social no desenvolvimento de conhecimentos e competências matemáticas e a importância das competências argumentativas nos currículos como forma de reforçar a autonomia intelectual nos alunos (Douek & Pichat, 2003). Para desenvolver o potencial argumentativo no aluno é fundamental que sejam implementadas, na sala de aula, diferentes actividades que estimulem a sua capacidade de argumentação, no entanto, para que tal objectivo seja atingido é necessário dispensar uma grande quantidade de tempo (Douek & Pichat, 2003).

A investigação em educação matemática em Portugal revela que tem sido dada maior ênfase às competências de nível cognitivo baixo, tais como a memorização de factos específicos, o domínio de conhecimentos, de técnicas e de terminologias, em detrimento das competências de nível cognitivo mais elevado, como o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas e de realizar tarefas de investigação matemática (Ponte, Matos & Abrantes, 1999). Os mesmos autores consideram também que a comunicação matemática na sala de aula tem pouca densidade argumentativa. Também a avaliação dos conhecimentos dos alunos se baseia, essencialmente, em fichas de avaliação predominantemente de resposta fechada, dando pouca importância aos aspectos diagnósticos e formativos da avaliação.

Boavida (2005b) salienta que o interesse pela argumentação, assim como a importância de serem criadas condições favoráveis na aula de matemática para experiências em que o foco seja a explicação e a fundamentação dos raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações e a formulação, avaliação e prova de conjecturas têm sido alvo de várias investigações em Matemática. O facto é que apesar da noção de argumentação ser utilizada frequentemente em educação matemática, o seu significado não tem sido amplamente discutido (Boavida, 2005b).

Actualmente, no novo programa de Matemática do ensino básico é dado um lugar de destaque à argumentação em Matemática devido ao facto de estar directamente ligada à importância dos alunos desenvolverem a capacidade de raciocinar matematicamente (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008). De acordo com este programa, os alunos devem ser estimulados a fundamentar matematicamente os seus raciocínios, explicitando-os quer oralmente quer por escrito, de forma a desenvolverem a capacidade de argumentação em Matemática (Ponte et al., 2007). No entanto, nas actuais orientações curriculares para o ensino secundário ainda não é dado destaque à necessidade de desenvolver nos alunos a capacidade de argumentar em Matemática.

Particularmente, no que concerne ao tema das funções, Domingos (2008) considera que em 20 anos de *Educação Matemática* tem sido dada pouca relevância na escola, apesar de fazer parte do currículo do ensino básico e secundário. No entanto, as funções são uma importante ferramenta da Matemática para efectuar a interpretação da realidade através de gráficos, de tabelas e de expressões (Domingos, 2008).

Caraça (1951) considera que na matemática o conceito de função aparece como "o instrumento próprio para o estudo das leis" (p.121) quantitativas que permitem estabelecer a conexão entre a matemática e as ciências da natureza. O conceito de função permite estabelecer correspondências entre as leis matemáticas e as leis geométricas, ou seja, entre as expressões analíticas e os lugares geométricos pois cada função pode ser representada pela sua expressão analítica e pela sua representação geométrica, denominado gráfico da função (Caraça, 1951).

No entanto, no ensino secundário continua a registar-se uma grande dificuldade no entendimento, na aplicação e na resolução de tarefas que impliquem estabelecer conexões entre a matemática e o real (Caraça, 1951). Para Kaldrimidou e Ikonomou (1998), o conceito de função tem uma posição central na ciência e na educação matemática pois uma função pode ser construída de várias maneiras de acordo com o contexto. Estudos efectuados apontam para preocupações no que concerne ao problema das funções poderem ser representadas de diferentes formas, nomeadamente numérica, algébrica, tabular, gráfica e verbal e para as dificuldades que os alunos têm em estabelecer conexões entre elas (Kaldrimidou & Ikonomou, 1998; Carraher & Schliemann, 2007).

São vários os investigadores que têm desenvolvido estudos nos quais se observa que os alunos demonstram ter dificuldades em traduzir as representações gráficas de funções nas suas formas algébricas (Markovits, Eylon & Bruckheimer, 1986; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990; Domingos, 2008). No entanto, apesar de na educação matemática a representação gráfica de funções ser um tópico importante, verifica-se que para a grande maioria dos alunos é considerada como um obstáculo difícil de transpor na sua compreensão pois ao trabalharem com funções e gráficos, constata-se que os conhecimentos que vão adquirindo ficam compartimentados e estanques, ou seja, demonstram ter dificuldades em estabelecer relações entre as informações das diferentes representações (Leinhardt et al., 1990; Demana, Schoen & Waits, 1993; Alves, 2000).

Com o aparecimento da calculadora gráfica, esse obstáculo pode estar reduzido por se tornar uma ferramenta que ajuda a compreender melhor alguns conceitos, possibilitando aos alunos a visualização enquanto fazem matemática (Demana & Waits, 1992). A visualização pode ser entendida como o processo de formar imagens mentalmente, com o auxílio de papel e lápis ou com o uso da tecnologia (Cunninghan & Zimmermann, 1991). Dependendo do contexto matemático, a visualização não está isolada das restantes representações podendo ser estabelecidas relações entre elas (Cunninghan & Zimmermann, 1991). O poder da visualização com a calculadora gráfica, em muitos temas de matemática do ensino secundário, permite que os alunos dediquem mais tempo à resolução de problemas e menos à manipulação meramente mecânica dos mesmos (Kaber & Longhart, 1995). Em particular, a visualização dos gráficos na calculadora permite ao aluno ter uma maior facilidade em criar uma imagem pictórica válida que o ajude a explicar as várias características associadas às funções, nomeadamente, intervalos de monotonia, pontos de intersecção com os eixos coordenados ou extremos relativos e absolutos (Alves, 2000).

Para além da sua componente visual a calculadora gráfica proporciona também aos alunos momentos de discussão na qual se partilham as suas ideias através de previsões, testes e generalizações, criando-se assim ambientes dedicados à investigação matemática (Jensen & Williams, 1993; Gracias & Borba, 2000). Assim, torna-se importante ser explorada a relação entre a tecnologia gráfica e o pensamento matemático pois ajuda a aumentar de uma forma considerável a compreensão das funções e dos gráficos respectivos (Moura, 2005).

O National Council of Teachers of Mathematics (1991) refere que as calculadoras gráficas permitem a realização de experiências fundamentais para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos assim como a investigação de situações de aplicação ao real dando especial ênfase aos processos de resolução de problemas. Salienta também que "o uso inteligente das calculadoras podem aumentar, quer a qualidade do currículo, quer a qualidade da aprendizagem" (NCTM, 1991, p.23). Os alunos ao usarem todos os dias a calculadora gráfica na sala de aula tornam-se "graficamente alfabetizados" e ajuda-os a desenvolver uma compreensão da função e do seu comportamento (NCTM, 1991, p.23). No entanto, as aplicações da calculadora gráfica na sala de aula, por vezes, são escassas. Normalmente a calculadora desempenha o papel de facilitador da representação gráfica de funções sem que os alunos reflictam sobre os resultados obtidos (Rocha, 2000). Assim, os alunos vão aprendendo a utilizar a calculadora gráfica, mas sem terem noção de todos os comandos existentes na máquina, limitando-se a seguir as sugestões da professora, visto considerarem mais importante aprender matemática e menos fundamental saber trabalhar com a calculadora gráfica (Rocha, 2000).

No ensino secundário, as tarefas que são propostas aos alunos e que constam nos manuais escolares são na grande maioria, de carácter fechado. Estas tarefas não promovem o desenvolvimento nos alunos do espírito crítico e da capacidade de investigar sobre as diferentes aplicações da calculadora gráfica, ficando assim, acomodados às informações e aos esclarecimentos do professor. No entanto, os alunos devem ser incentivados a agirem como pequenos investigadores em todo o processo de ensino e aprendizagem, diversificando as propostas de trabalho e contribuindo assim, para uma melhoria da utilização da calculadora gráfica (NCTM, 2008; Mamede, 2002; Moura, 2005). Como refere Dugdale (1993) a fácil manipulação das representações gráficas dá origem à possibilidade de visualização da representação de funções e desempenha assim um papel importante no raciocínio matemático, na investigação e na argumentação. Assim, novas formas de trabalhar na sala de aula são necessárias para incentivar os alunos a raciocinar com o auxílio da calculadora gráfica.

Neste contexto, e por todos os argumentos apresentados anteriormente, a presente dissertação tem por objectivo contribuir para o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente ao longo da realização de uma sequência de tarefas com recurso à utilização da calculadora gráfica. Pretende-se também contribuir para uma melhoria nos alunos da compreensão e entendimento das funções racionais através da implementação e exploração de uma sequência de tarefas com a utilização da calculadora gráfica de uma forma mais crítica e reflexiva.

As motivações que levaram a professora investigadora a optar pelo tema em estudo prendem-se com uma consciencialização, enquanto professora de Matemática do ensino secundário ao longo de quinze anos, das dificuldades que os alunos evidenciam, em argumentar relativamente às conclusões obtidas nas tarefas propostas, em desenvolver raciocínios que validem ou rejeitem as suas conjecturas e na análise de forma crítica e reflexiva dos resultados obtidos na calculadora gráfica. A selecção do tema das funções racionais para efectuar o presente estudo, resulta do facto de ser um dos itens do programa de 11.º ano em que se torna fundamental os alunos saberem utilizar a calculadora gráfica de forma a tirar o máximo partido das suas potencialidades. Um outro factor decisivo na escolha das funções racionais para efectuar a experiência surgiu de ao longo dos anos de leccionação ter verificado que os alunos revelam muitas dificuldades no entendimento das diferentes representações das funções assim como em explicarem as suas diferentes características, nomeadamente, intervalos de monotonia, pontos de intersecção com os eixos coordenados ou estudo do sinal e da paridade.

Assim, no inicio da experiência a professora investigadora seleccionou e elaborou uma sequência de tarefas de investigação a serem implementadas numa turma do 11.º ano, de forma a ser leccionado o tema das funções racionais através da sua exploração. A planificação das tarefas de investigação com a utilização da calculadora gráfica pretendeu proporcionar aos alunos experiências significativas de aprendizagem e teve como objectivo fundamental desenvolver as suas capacidades de argumentação em Matemática.

1.3. Organização do estudo

O presente estudo tem como objectivo compreender o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente, ao longo da implementação de uma sequência de tarefas com a utilização da calculadora gráfica. A planificação da sequência de tarefas estudadas foi efectuada de forma a permitir aos alunos trabalhar em pequeno e em grande grupo de modo que valorizem o raciocínio, promovam a discussão e, assim, desenvolvam a argumentação em Matemática.

Este estudo está dividido em duas partes fundamentais, a fundamentação teórica e o trabalho empírico. Na primeira parte, a fundamentação teórica é composta por dois capítulos que se debruçam sobre as duas áreas de investigação em que se enquadra o presente estudo, a argumentação em matemática e a calculadora gráfica. No primeiro (capítulo 2) sobre a argumentação em Matemática são referidas algumas perspectivas teóricas sobre as suas características e significados e sobre a argumentação na sala de aula. O segundo (capítulo 3) é inteiramente dedicado à calculadora gráfica com uma breve introdução histórica sobre o seu aparecimento, seguindo-se de um desenvolvimento teórico e de alguns trabalhos práticos sobre a influência da calculadora gráfica no tema das funções.

A segunda parte do trabalho é constituída por dois capítulos. No primeiro (capítulo 4) é apresentada e fundamentada a metodologia adoptada e está subdividido em seis itens, as opções metodológicas, os participantes no estudo (a escola, a turma, os grupos e a selecção dos alunos para o estudo de caso), a recolha de dados, a análise de dados, as tarefas de investigação e a planificação das tarefas de investigação. O cerne da investigação está no capítulo seguinte (capítulo 5), no qual são apresentados os resultados do estudo de caso relativo a uma turma do 11.º ano do ensino secundário. Este capítulo subdivide-se em cinco itens relativamente aos resultados obtidos em cada uma das cinco tarefas investigadas.

Por fim, a investigação tem o seu termo no último capítulo (capítulo 6) em que são relatadas as conclusões do estudo e são feitas algumas sugestões para futuras investigações.

Parte I.

Fundamentação Teórica

CAPÍTULO 2

A argumentação em Matemática

Este capítulo está organizado em duas partes: a primeira centra-se na procura de uma definição de argumentação em Matemática e nas suas características e significados. A segunda parte é dedicada à argumentação na sala como actividade de comunicação, explicitação do raciocínio e prova matemática. Por último, apontam-se constrangimentos e dificuldades da actividade de argumentar em Matemática.

2.1. A argumentação: características e significados

Em meados dos anos oitenta, Oléron (1983) definiu argumentação como "o método pelo qual uma pessoa – ou um grupo – intenta levar um auditório a adoptar uma posição através do recurso a apresentações ou asserções – argumentos – que visam mostrar a validade ou o fundamento" da posição adoptada (p.13). Esta definição coloca em destaque três características na base da argumentação: a) a argumentação é um *fenómeno social* pois faz com que várias pessoas intervenham; b) a argumentação é uma prática em que um pessoa procura exercer *influência* sobre outra ou outras; e c) a argumentação é um processo que tem vínculo com o *raciocínio* e a *lógica* (Oléron, 1983).

2.1.1. À procura de uma definição de argumentação em Matemática

As primeiras teorias sobre a argumentação foram desenvolvidas na sociedade grega. Em particular Aristóteles fez a distinção de três domínios onde se exerce a argumentação: a retórica, a dialéctica e a analítica. A *retórica* destina-se a um auditório relativamente passivo. À pessoa que argumenta não importa o método que utiliza e a estratégia, pois o objectivo é que o interlocutor seja persuadido (Pedemonte, 2002). A *dialéctica* destina-se a um interlocutor bem consciente do sujeito da argumentação e capaz de responder às questões e de refutar os argumentos do orador. A *analítica* é uma forma específica de racionalidade que não se destina necessariamente a um público fisicamente constituído.

Pedemonte (2002) propôs uma caracterização de argumentação em Matemática, aproximando-a da dialéctica e a prova da analítica. Caracterizou a argumentação em matemática e a prova explicitamente nas suas características funcionais e nas características estruturais. As características funcionais determinam a finalidade da argumentação, a sua utilidade e o seu papel no interior de um discurso. As características estruturais permitem identificar um argumento e definir uma estrutura.

A argumentação, no domínio da dialéctica, está inevitavelmente associada à incerteza, ao provável, abarcando sempre um certo risco. Para Perelman e Olbrechts-Tyteca (1988),

> a própria natureza da deliberação e da argumentação opõe-se à necessidade e à evidência, porque não se delibera quando a solução é necessária, e não se argumenta contra a evidência. O domínio da argumentação é o verosímil, do plausível, do provável, na medida em que este último escapa às certezas do cálculo. (p.1)

Johnstone (1992) considera que,

> argumentar é correr inerentemente o risco de falhar, tal como jogar um jogo é inerentemente arriscar-se a perder. Uma argumentação cuja vitória nos esteja garantida deixa de ser uma argumentação real, tal como um jogo cuja vitória esteja garantida deixa de ser um jogo real. (p.39)

Segundo, Perelman (1993) argumentação depende e é valorizada pelo conjunto de pessoas que o orador quer influenciar através das justificações que apresenta, ou seja, o auditório a quem se dirige. Torna-se assim, importante que o orador ao desenvolver a sua argumentação se preocupe com as reacções do público, e o seu papel de mais ou menos activo no debate.

Para Grácio (1993), quando uma experiência "é objecto de discussão, de interpretação, de polémica" (p.73) estamos perante a argumentação (Grácio, 1993). Existe argumentação quando algo provoca discussão por não ser considerado como evidente, suscitando tomadas de posição, decisão ou escolhas que resultam da necessidade de defesa ou de crítica.

Na opinião de Weston (1996) argumentar significa "oferecer um conjunto de razões a favor de uma conclusão ou oferecer dados favoráveis a uma conclusão" (p.13), ou seja, fornecer dados e razões suficientes para que outros tenham a oportunidade de formar a sua própria opinião. Para este autor argumentar não significa uma discussão ou apenas a afirmação de um determinado ponto de vista. Os argumentos são tentativas de sustentação de uma forma de pensar com razões, e são essenciais na medida em que constituem um modo de descobrir quais os melhores pontos de vista que dão origem a conclusões fundamentadas por boas razões (Weston, 1996). Assim, o argumento é uma forma de investigação.

Grize (1996) considera que "argumentar é uma actividade específica, que visa intervir sobre as ideias, opiniões, atitudes, sentimentos ou comportamentos de alguém ou de um grupo de pessoas" (p.5). O argumento é considerado como uma actividade intencional e discursiva requerendo uma participação activa daqueles a quem é dirigida.

Forman et al. (1998) definem argumentação como "a explicação intencional do raciocínio de uma solução, durante ou depois o seu desenvolvimento" (p.231). Para Duval (1999) a investigação sobre a argumentação surgiu como um interesse pelas diferentes formas de raciocínio que escapam das normas e da lógica, ou seja, que surgem de uma forma espontânea numa discussão. No entanto, Douek e Scali (2000) consideram a argumentação como um conjunto de argumentos logicamente conectados, desempenhando um papel crucial nas actividades matemáticas.

Para Pedemonte (2002) "a argumentação é um processo de transmissão de conteúdos, de ideias, de valores epistemológicos" (p. 28), sendo estes os elementos evolutivos que caracterizam a finalidade da argumentação. Quando se constrói uma argumentação, os conteúdos mudam, formam-se as ideias e os valores epistemológicos evoluem progressivamente.

2.1.2. Características da argumentação em Matemática

Para Boavida et al. (2008) a argumentação em matemática entende-se como

> conversações de carácter explicativo ou justificativo, centradas na matemática, em que assumem um papel preponderante a fundamentação dos raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações, a formulação, teste e prova de conjecturas e a resolução de desacordos através de explicações e justificações convincentes e válidas de um ponto de vista matemático. (p.84)

No presente trabalho, adopta-se uma perspectiva próxima da referida por Boavida et al. (2008), considerando argumentação matemática como um processo dinâmico e progressivo em que são apresentadas razões e justificações, na resolução de desacordos.

Pedemonte (2002) considera que "na argumentação em matemática há sempre uma finalidade, um objectivo que determina a sua orientação" (p.291). Quando um argumento é construído, os conteúdos mudam, as ideias tomam forma e os valores epistemológicos transformam-se, dando assim funcionalidade ao argumento. Assim, a argumentação modifica as opiniões fazendo um apelo à razão, devendo ser aceite por um auditório universal e não por um particular. Segundo Pedemonte (2002) algumas das características da actividade de argumentar em Matemática são: a natureza discursiva da argumentação, a natureza dialéctica da argumentação e a natureza social da argumentação. A relevância destas características justifica algum detalhe.

A natureza discursiva da argumentação

A argumentação tem uma natureza discursiva, pois usa, essencialmente, a linguagem natural como uma ferramenta de comunicação entre a pessoa que argumenta e o seu interlocutor (Pedemonte, 2002). A argumentação consiste em aumentar ou provocar a adesão de um auditório modificando as suas convicções por meio de um discurso. Um discurso é convincente quando as suas premissas e argumentos são universais, isto é, quando são aceites por todo o auditório (Perelman, 1993). Para tal, o orador deve adaptar-se ao seu auditório caso queira que o seu discurso seja eficaz.

A discursividade da argumentação, ou seja, a argumentação retórica não se pode cingir a um só argumento, mas a um conjunto de argumentos, pois exige a capacidade de avaliar um argumento e de o opor a outros (Duval, 1999). Segundo Duval (1999) existem diferentes factores que determinam o contexto de produção de um argumento: a posição da pessoa em relação ao orador (de cooperação, de conflito), a motivação de uma argumentação (tomar uma decisão, encontrar a solução para um problema) e o objectivo (mudança do ponto de vista de alguém, diminuição dos erros e dos caminhos sem saída de acordo com uma escolha).

Perelman e Olbrechts-Tyteca (1988) consideram que o essencial da teoria da argumentação é a *adesão*, pois "o objecto desta teoria é o estudo das técnicas discursivas que permitem provocar ou aumentar a adesão dos espíritos às teses que se apresentam ao seu assentimento" (p.5). Por esta razão, a teoria de Perelman e Olbrechts-Tyteca caracteriza-se como uma nova retórica pois quando incide "sobre o fenómeno da adesão, a sua atenção recai, não sobre o valor formal dos argumentos, mas sobre as suas características operatórias e sobre o espaço da sua recepção" (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1988, p.27), ou seja, vai incidir sobre o auditório visado numa determinada argumentação e sobre os esquemas utilizados de carácter argumentativo, pois é em função de um dado auditório que se desenvolve determinado tipo de argumentação. Perleman e Olbrechts-Tyteca (1988) definiram auditório como "o conjunto daqueles que o orador quer influenciar com a sua argumentação" (p.22). Na argumentação o importante é o parecer daqueles a quem o orador se dirige e não é saber o que o próprio orador entende como verdadeiro ou probatório. Portanto, o auditório desempenha um papel primordial na determinação da qualidade da argumentação e do comportamento dos próprios oradores.

Como a argumentação tem como objectivo persuadir e convencer um auditório é necessário que seja plausível, quer os argumentos se dirijam para um auditório universal ou para um particular (Perleman & Olbrechts-Tyteca, 1988). Mas supõe também a escolha de bons pontos de partida e de técnicas argumentativas eficazes. Em função da teoria da argumentação e do papel desempenhado por determinados auditórios, é necessário estabelecer uma distinção entre *persuadir e convencer*. Para quem se preocupa com o carácter racional da adesão, convencer é mais importante do que persuadir. Na mesma linha, Perleman e Olbrechts-Tyteca (1988) consideram *persuasiva,* a argumentação que pretende ser válida só para um auditório em particular e *convincente*, a argumentação que pretende obter a adesão de todo o ser racional. Tanto para o desenvolvimento da argumentação como para o seu ponto de partida, é necessário estabelecer um acordo com o auditório. Esse acordo depende do conteúdo das premissas, das ligações particulares utilizadas e da forma de se servir das ligações, ou seja, a análise da argumentação depende do que se presume ser admitido pelos ouvintes (Perleman & Olbrechts-Tyteca, 1988).

A natureza dialéctica da argumentação

A argumentação tem uma natureza dialéctica, dado que consiste em tentar justificar uma ideia, ou conjunto de enunciados a partir de algo que se crê ser verdade. Neste processo as inferências apoiam-se sobretudo nos conteúdos do que é enunciado e as conclusões a que se chega podem não ser verdadeiras pois dependem dos raciocínios efectuados (Pedemonte, 2002). Quando estes raciocínios têm por base ideias consideradas como verdadeiras por quem argumenta, a argumentação em Matemática é dialéctica.

Perleman e Olbrechts-Tyteca (1988) consideraram dois grupos diferentes de argumentos: os *argumentos quase-lógicos*, que podem ser melhor entendidos se os aproximarmos do pensamento formal e os *argumentos baseados na estrutura do real* que se apresentam de acordo com a própria estrutura das coisas. Enquanto nos *argumentos quase-lógicos* se pretende obter a validade de forma racional, devido ao facto de existir uma relação entre certas fórmulas lógicas ou matemáticas, os *argumentos baseados na estrutura do real* valem-se da argumentação para "estabelecer uma solidariedade entre juízos admitidos e outros que se procura promover" (Perleman & Olbrechts-Tyteca, 1988, p.297). Nos *argumentos quase-lógicos* que se baseiam nas estruturas matemáticas, põem-se em evidência inicialmente "o esquema formal que serve de molde à construção do argumento, depois, as operações de redução que permitem inserir os dados nesse esquema e visam torná-los comparáveis, semelhantes, homogéneos" (Perleman & Olbrechts-Tyteca, 1988, p.219). Desta forma, os *argumentos quase-lógicos* são os que estão mais próximos dos raciocínios formais, que são característicos da matemática. Numa demonstração formal a ordem da exposição dos argumentos não tem importância, transfere-se para os teoremas o valor da verdade que é atribuída por hipótese, aos axiomas. No entanto, quando se argumenta com intuito de obter a adesão de um auditório a ordem de apresentação dos argumentos modifica a sua aceitação na medida em que devem surgir em momentos em que seja exercido maior efeito (Perleman, 1993).

Toulmin (1969) propôs um modelo (fig. 1), para descrever a estrutura da argumentação, considerando que o *esqueleto* mínimo da argumentação é formado por três elementos: os *dados* (D), a *garantia* (G) e a *conclusão* (C).

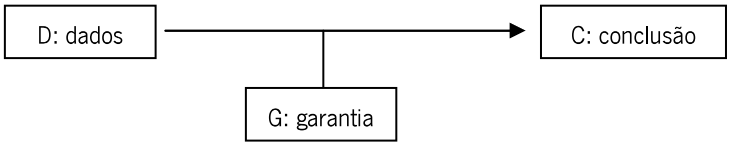


Figura 1. *Esqueleto* mínimo de argumentação segundo Toulmin (adaptado de Boavida, 2005b)

Segundo Toulmin (1969), em qualquer argumentação, a primeira etapa consiste na produção de dados que suportem uma afirmação previamente formulada. Este passo é importante para justificar ou autorizar a utilização dos dados em causa. A garantia pode ser expressa como um princípio ou uma regra, e actua como uma ponte entre os dados e a conclusão.

Sendo esta a estrutura base da argumentação, elementos auxiliares podem, no entanto, ser necessários para a descrever, pois pode acontecer que numa argumentação surjam dúvidas ou desacordos sobre a validade da garantia. Toulmin descreve três dos elementos aos quais se pode recorrer de modo a fundamentar a aceitação da garantia, nomeadamente: o *quantificador modal* (Q), a *condição de refutação* (R) e o *fundamento* (F). Quantificador modal é um indicador de força que a garantia concede à transição dos dados à conclusão; a condição de refutação determina as condições em que poderá ser necessário invalidar o poder da garantia. A força da garantia poderá ser enfraquecida se houver excepções à regra e, neste caso, condições de excepção ou de refutação devem ser inseridas. O fundamento é necessário se a autoridade da garantia não for aceite de imediato, pois o fundamento fortalece a aceitabilidade da garantia (Toulmin, 1969).

Assim, o modelo de argumentação de Toulmin, apresentado de forma mais detalhada num outro esquema (fig.2), contém os seis elementos referidos.

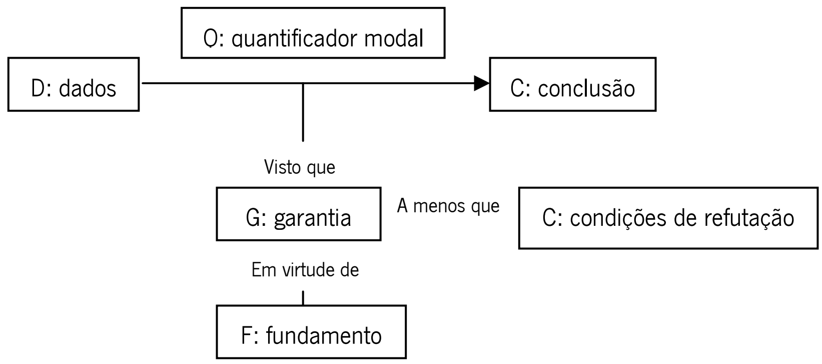


Figura 2. Modelo de argumentação de Toulmin (adaptado de Pedemonte, 2002)

Portanto, para Toulmin a argumentação é considerada como "um tipo de actividade que decorre de uma acção cujo valor ou validade é questionado o que requer a apresentação de elementos justificativos" (Boavida, 2005b, p.75).

Tendo como base a análise do modelo de Toulmin, Pedemonte (2002) considerou três tipos de argumentação: a argumentação dedutiva, a argumentação abdutiva e a argumentação indutiva. A argumentação *dedutiva* tem a mesma forma da demonstração dedutiva. No entanto, a dedução por demonstração utiliza apenas objectos formais e baseia-se sempre numa teoria matemática. Em contrapartida, a argumentação dedutiva utiliza a linguagem natural e pode não se basear numa teoria matemática. A argumentação *abdutiva* é considerada como um modelo de inferências utilizadas num processo de descoberta. A argumentação *indutiva* é uma inferência ampliada que conduz à construção de novos conhecimentos a partir da observação de casos particulares que podem ser generalizados a um conjunto mais amplo de casos.

Perleman (1993) considera que uma argumentação dedutiva pode dar origem a uma demonstração, que será correcta se as operações estiverem de acordo com um esquema pré-estabelecido e, incorrecta no caso contrário. Na demonstração podemos deduzir a conclusão a partir das premissas, enquanto na argumentação o discurso através do qual os argumentos são explicitados podem ser dirigidos, simultânea ou sucessivamente a diferentes tipos de auditório. De facto, no desenvolvimento de uma argumentação as premissas podem ser enriquecidas e a ordem dos argumentos é ditada pela necessidade de fazer ressaltar novas premissas (Perleman & Olbrechts-Tyteca, 1988). Quando a validade das premissas garante a validade das conclusões os argumentos dizem-se dedutivos e quando estes são bem formados chamam-se argumentos válidos (Weston, 1996). Assim, um argumento dedutivo é qualquer argumento que verifique as regras da lógica. Tal como a argumentação, a demonstração é uma justificação racional pois a demonstração é uma argumentação particular (Pedemonte, 2002).

A argumentação é então uma tentativa de efectuar uma justificação de uma ideia ou de um conjunto de enunciados a partir do que se considera ser verdade, "um processo em que as inferências se apoiam, principalmente, sobre os conteúdos" do que foi enunciado (Boavida et al., 2008, p.84). Os raciocínios envolvidos na argumentação podem não implicar que se chegue a conclusões necessariamente verdadeiras. No entanto, as ideias são consideradas verdadeiras por quem argumenta e por este motivo, a argumentação em matemática é dialéctica (Pedemonte, 2002; Boavida et al., 2008).

A natureza social da argumentação

A argumentação tem uma natureza social, pois "a argumentação desenvolve-se como um conjunto de interacções face a face que mobiliza, frequentemente, vários protagonistas" (Pedemonte, 2002, p.89). Além disso é considerada um fenómeno social, na medida em que comporta uma actividade intencional discursiva, onde o discurso é entendido como uma actividade social (Balacheff, 1999). Numa argumentação colectiva é necessário que haja entendimento entre os seus elementos mesmo que estejam em causa correcções ou modificações. O próprio Lakatos (1976), com o livro *Preuves et Réfutations*, introduziu a ideia de uma matemática falível, considerando que o erro faz com que haja um maior desenvolvimento do conhecimento matemático. Recorde-se, que nessa época, dentro da comunidade matemática, as condições de produção eram dominadas por uma ideologia em que o modelo de produção do conhecimento era aquele que era enriquecido sem erros e sem falhas. No entanto, o *erro* é uma etapa natural e indispensável ao desenvolvimento do conhecimento científico e "é muitas vezes necessário passar pelo *erro* para ser possível avançar no conhecimento" (Inácio, 1998, p.19).

Os investigadores Crespo, Farfán e Lezama (2009), evidenciaram que os princípios da lógica clássica, assumidos como as leis do pensamento humano durante vários séculos, são efectivamente construções socioculturais. Estes investigadores consideram que as formas de argumentar presentes, por exemplo, numa aula de matemática não têm características aristotélicas, que consideravam a lógica matemática como inata. Actualmente, a compreensão de carácter social da argumentação e da demonstração, entendidas como práticas sociais, poderá ajudar a uma maior percepção sobre as formas de argumentar. Pois, a dificuldade que os alunos continuam a manifestar na demonstração e na procura de possíveis caminhos para a resolução de situações problema faz com que seja importante que desenvolvam a capacidade de raciocinar e de argumentar matematicamente, enquanto elementos pertencentes a uma comunidade escolar e social. (Boavida et al., 2002; Boavida, 2005a).

Como forma de melhorar a compreensão dos alunos para a necessidade de argumentar matematicamente e da inclusão da demonstração das propriedades matemáticas, é fundamental que se construa a significado da argumentação. Crespo et al. (2009), consideram que um dos actuais desafios da escola é o de identificar e compreender a presença de formas de argumentação que os alunos constroem fora da escola e que depois transpõem para dentro da sala de aula.

Krummheuer (1998) considera que uma (micro) abordagem sociológica em que os alunos participam na criação de formatos de argumentação pode contribuir para uma aprendizagem matemática, ou seja, contribuir para os processos de argumentação colectiva. Uma característica típica dos processos de ensino e aprendizagem é que a aprendizagem individual do aluno é incorporada num processo social de explicar, esclarecer e ilustrar. Estes processos de interacção da argumentação contribuem para iniciar, para orientar e para avaliar a aprendizagem individual (Krummheuer, 1998).

2.2. A argumentação na sala de aula

Nas últimas décadas, a maior preocupação da matemática escolar foi centrar-se no produto em vez de se centrar no processo, visto que muitos alunos são incapazes de explicar ou de justificar os seus raciocínios (Vincent, Chick & McCrae, 2005). No entanto, fazer matemática consiste em fazer descobertas, conjecturas, generalizações, contra-exemplos, refutações e provas. A matemática escolar deve mostrar a natureza do processo intuitivo e criativo. As concepções erradas e os erros de raciocínio fazem parte do processo construtivo da matemática (Vincent et al., 2005).

O NCTM (2008) salienta que, no ensino secundário, espera-se que os alunos sejam capazes de construir raciocínios lógicos complexos e de apresentar justificações matemáticas para as suas conjecturas. Como o objectivo deste ensino consiste nos alunos desenvolverem e justificarem conjecturas torna-se importante que aprendam a questionarem-se sobre a forma como pensaram, mesmo que errem os seus raciocínios. O aluno ao tentar resolver uma situação problemática vai fazer esquemas cognitivos ou desenvolver raciocínios de forma a encontrar a solução adequada ao problema em questão. Semana e Santos (2008), consideram que o *erro* enquanto fenómeno inerente à aprendizagem como uma fonte rica de informação. O professor deverá ser capaz de compreender o porquê da sua natureza, formular hipóteses explicativas do raciocínio e orientar o aluno adequadamente, para que este seja capaz de o identificar e de o corrigir. O professor ao fazer a análise dos erros dos alunos pode aperceber-se das dificuldades que eles têm em determinados conteúdos e do caminho a percorrer para as colmatar. Ponte e Serrazina (2000) referem que se o professor considerar o *erro* como algo "anormal" sancionando o aluno, vai fazer com que ele não responda às questões quando tem dúvidas. No entanto, quando as respostas dadas, mesmo incorrectas são alvo de esclarecimento por parte do professor, tornando-se num elemento de trabalho, vão desencadear uma atitude positiva face à disciplina envolvendo o aluno na tarefa proposta, incentivando-o na procura da solução ao problema proposto. Os alunos devem ser capazes de entender que para a validação dos resultados obtidos na investigação é necessário testarem exemplos muito variados "interrogando-se sistematicamente sobre as propriedades gerais e as relações que encontram nesses exemplos" (Ponte & Serrazina, 2000, p.58).

A partir dos anos 80, são vários os documentos no âmbito da investigação em Educação Matemática que destacam a necessidade e a importância de envolver os alunos em actividades de argumentação, em que estes tenham que fundamentar e explicitar os seus raciocínios de forma a serem encontradas justificações válidas e coerentes de acordo com cada situação (Duval, 1999; Boavida et al., 2002; Boavida, 2005a). Neste tipo de experiências, a formulação e a reformulação das possíveis conjecturas assumem um papel fundamental no ensino e aprendizagem pois os alunos são estimulados no sentido de encontrar, testar e validar as respostas às tarefas propostas (Boavida et al., 2002; Boavida, 2005a).

Quando um aluno explicita o seu pensamento aos restantes elementos da turma a argumentação causa efeito na discussão que se desenvolve posteriormente, pois os alunos após ouvirem a explicação do colega podem desenvolver argumentações contra, a favor ou simplesmente melhorarem as suas ideias (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997; Whitenack & Yackel 2008). Desta forma, os alunos estão a tornar as suas ideias públicas e vão progressivamente clarificando para si e para os outros as suas formas de pensar (Ponte et al., 1997; Whitenack & Yackel 2008).

Os alunos desenvolvem a capacidade de argumentar quando nas aulas de matemática se criam momentos para a exploração de tarefas de investigação cuidadosamente e meticulosamente preparadas, de forma a promoverem a formulação e a prova de conjecturas (Boavida, 2005b). Quando as actividades envolvem os alunos na argumentação matemática e em experiências de prova, desencadeiam a necessidade de testarem a validade ou não validade das suas conjecturas. Torna-se importante, para que não se desperdicem, na sala de aula, as oportunidades de argumentação, que sejam implementadas e desenvolvidas tarefas do tipo investigativo em duas fases distintas: uma destinada ao trabalho de grupo e outra ao grupo turma (Boavida, 2005b). Desta forma, os alunos são incentivados a formular problemas, questões e conjecturas, a apresentar soluções, a analisar exemplos e contra-exemplos na exploração de uma conjectura e a utilizar argumentos matemáticos para verificar a validade das afirmações de forma a convencerem-se a si mesmos e aos restantes elementos da turma (Ponte et al., 1997; Whitenack & Yackel 2008).

Quando usamos a argumentação como meio de investigação podemos começar por uma conclusão que pretendemos defender e posteriormente tentar encontrar razões que a permitam provar (Weston, 1996). Na opinião deste autor, os alunos ao argumentarem de forma a defenderem os seus pontos de vista, por vezes não apresentam as verdadeiras razões que determinem que os seus pontos de vista estão correctos. A argumentação tem de ser usada pelos alunos, simultaneamente, como uma forma de investigação e como uma maneira de explicar e de defender as suas conclusões. O aluno deverá ter presente os argumentos que sustentam diferentes pontos de vista, defender as suas conclusões e avaliar de forma crítica alguns argumentos relativos aos pontos de vista opostos (Weston, 1996).

2.2.1. A argumentação como actividade de comunicação

Para alguns investigadores, os aspectos culturais reflectem-se no tipo de comunicação desenvolvida sendo a argumentação matemática um tipo de comunicação verbal e a prova matemática uma importante componente da comunicação na comunidade matemática (Sckiguchi & Miyazaki 2000; Sckiguchi, 2002).

Douek (2005) considera que a argumentação na comunicação é importante e relevante pois a argumentação pode ser considerada como um desenvolvimento particular da comunicação. Assim, na Matemática a problemática em torno da argumentação prende-se com a necessidade de cada vez mais os alunos interagirem comunicando quer oralmente quer por escrito as suas ideias valorizando as linguagens naturais (Douek, 2005). A argumentação utiliza a linguagem natural como uma ferramenta de comunicação entre a pessoa que argumenta e o seu interlocutor (Pedemonte, 2002). O facto é que a comunicação cada vez mais desempenha um papel preponderante no ensino e aprendizagem da Matemática, fazendo parte das orientações curriculares da disciplina nos diferentes níveis de ensino (NCTM, 1994; Ponte & Santos, 1998; Yackel & Cobb, 1998; Ponte & Serrazina, 2000; Meneses, 2005).

O NCTM (2008) considera que "através da comunicação as ideias tornam-se objectos de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correcção" (p.65). O desenvolvimento da capacidade de comunicar matematicamente torna-se um objectivo curricular importante, na medida em que os alunos na sala de aula não só aprendem a falar e a escutar os colegas (Menezes, 2005), como a formalizar as suas ideias (Pimm, 1996).

Na sala de aula de matemática importa que os alunos desempenhem um papel activo, não se limitando a ser meros receptores de conhecimento (Silver & Smith, 1996). Em particular, que sejam envolvidos em tarefas desafiantes, que promovam o seu desenvolvimento intelectual e que os levem a compreender as ideias matemáticas. Importa, igualmente que se envolvam em discursos sobre os seus entendimentos relativamente às tarefas desenvolvidas (Silver & Smith, 1996). Desta forma, os alunos são estimulados para se empenharem em fazer matemática enquanto participam activamente numa comunidade de discurso, a sala de aula. A comunicação toma assim um papel preponderante nessa comunidade e, segundo Alrø e Skovsmose (2002), a sua qualidade reflecte-se na qualidade da aprendizagem matemática. No entanto, vários são os aspectos que é necessário ter em conta, nomeadamente, ouvir devidamente as ideias dos alunos e questioná-los no sentido de as clarificar e justificar (Antão, 1996; Silver & Smith, 1996).

Na comunicação é fundamental que todos os intervenientes aprendam a falar e a escutar para que seja possível entender o pensamento e o raciocínio de cada um. Os alunos ao partilharem as suas ideias e raciocínios são co-responsabilizados a participar na construção dos seus conhecimentos e dos seus pares (Ponte & Serrazina, 2000; Boavida & Fonseca, 2009).

Os actos de ensinar e de aprender são, no fundo, actos de comunicar (Menezes, 1999). No entanto a qualidade das comunicações é influenciada pela natureza das tarefas propostas. Por exemplo, quando as tarefas propostas aos alunos são do tipo investigativo, devem ter um carácter aberto permitindo obter uma ou mais soluções e, sempre que possível, devem ser acompanhadas de objectos concretos que os alunos possam manipular (Cohen & Manion, 1992). Os alunos ao realizarem tarefas em pequeno ou em grande grupo, criam espaços dedicados à discussão com a clarificação de opiniões adequadas e fundamentadas, desenvolver a compreensão do modo como pensam e raciocinam, adquirindo a capacidade de se organizarem e de clarificarem as suas ideias e opiniões (Ponte, 2005; Fonseca, 2009). No entanto, antes dos momentos dedicados à discussão é necessário que o professor dedique algum tempo para que os alunos organizem as próprias ideias para que as suas intervenções sejam convincentes e esclarecedoras ao comunicarem as soluções encontradas na resolução de determinada tarefa. Este processo, caracterizado por ser dinâmico e aberto às questões, permite que os alunos se apercebam da qualidade do seu raciocínio e do que necessitam de alterar e adequar no caso de não ter sido o mais correcto (Arends, 2008). A discussão constitui uma maneira dos alunos treinarem a forma como pensam e consequentemente de melhorarem as competências relativas ao raciocínio matemático.

A comunicação na sala de aula em que existe um espírito de partilha de ideias leva a que os alunos se apropriem das ideias dos seus colegas, desenvolvendo as suas. Assim, a comunicação ajuda o aluno a aprender e ao mesmo tempo desenvolve-lhe a capacidade de compreender o seu próprio pensamento. A comunicação está sempre presente na sala de aula e é necessário que ela se estabeleça em múltiplas direcções, nomeadamente entre alunos-professor, alunos-alunos e professor-alunos (Fonseca, 2009).

Para os alunos comunicarem as suas ideias e raciocínios, oralmente ou por escrito, é fundamental que o façam de forma clara para que seja entendível pelos outros (Cai et al., 1996; Boavida et al., 2008). Para Ponte et al. (1997), "a comunicação oral é determinante no que os alunos aprendem acerca da disciplina, quer sobre os conteúdos, quer sobre a própria natureza da Matemática" (p.84). Considera também que a comunicação escrita é importante na expressão das ideias matemáticas, nomeadamente nos relatórios ou ensaios nos quais os alunos justificam os seus raciocínios. Deste modo, o aluno deve ser encorajado a comunicar oralmente e por escrito (Ponte et al., 1997; Menezes, 1999; Fonseca, 2000). Estes dois tipos de linguagem são essenciais no incentivo à reflexão e à compreensão da Matemática (Cai et al., 1996; Ponte et al. 2007).

A comunicação oral funciona como base para o pensamento e é através dela que o que é fundamental no ensino e na aprendizagem se desenvolve (Cai et al., 1996; Ponte et al., 2007). Este tipo de comunicação, desempenha um papel fundamental na aula de Matemática pois é o instrumento para que os alunos ouçam o que o professor está a dizer, expressem as suas ideias e as partilhem com os restantes colegas da turma (Ponte & Serrazina, 2000). Para que haja comunicação oral entre os alunos, é necessário que haja entendimento e aceitação das perspectivas entre eles, ou seja, que as perspectivas sejam partilhadas, estabelecendo-se deste modo, uma negociação de significados (Araújo, 2004).

A comunicação escrita é uma maneira de comunicar, e também desempenha um papel complementar e crucial no ensino e aprendizagem da Matemática (Cai et al., 1996; Ponte et al., 2007). Um dos instrumentos que geralmente está associado às tarefas de investigação e à comunicação escrita é o relatório, pois promove a articulação das ideias, explicação dos procedimentos, a fundamentação e a análise crítica e reflexiva dos processos utilizados e dos resultados obtidos (Semana & Santos, 2008).

O relatório escrito privilegia aspectos relacionados com o desenvolvimento de capacidades, como o raciocínio matemático e a comunicação, assim como a reflexão, o espírito crítico, o sentido de responsabilidade e persistência. Para Menino (2004), realizar um relatório de investigação escrito é muito mais complexo do que responder simplesmente a um conjunto de questões, visto que exige que o aluno tenha a capacidade de redigir um texto que descreva, analise e tire conclusões sobre a actividade realizada e que reflicta sobre os aspectos não matemáticos e matemáticos nela envolvidos. Este tipo de relatório escrito pode ser realizado individualmente ou em grupo, em contexto de sala de aula ou fora dela, durante um período curto ou longo de tempo e ser aplicado a diferentes tipos de tarefas. Por ser um instrumento com um elevado grau de exigência, a maioria dos alunos tem ainda muita dificuldade na elaboração de um relatório sobre uma tarefa de investigação (Menino, 2004).

Sobre este assunto, Boavida et al. (2008) consideram que é necessário dar alguma orientação aos alunos na realização de um relatório, elaborando um tipo de guião que sirva como orientador do processo de escrita. As questões desempenham um papel fundamental na elaboração de um guião. Por exemplo, questões do tipo: "No que reparaste? O que achaste interessante? Que previsões fizeste? Porquê? Que relação te faz lembrar? O que é que as tuas descobertas te fazem pensar?" (Boavida et al., 2008, p.69) podem servir como orientação para que os alunos diferenciem o que é mais ou menos relevante na resolução da tarefa.

Para que os alunos evoluam na forma como elaboram relatórios escritos, é importante que sejam implementadas actividades investigativas continuadas, para uma melhor apropriação dos processos e raciocínios adequados para os desenvolver. Estas actividades podem ser desenvolvidas em pequenos grupos de trabalho. Estes são os espaços onde se potencia a comunicação verbal e em que os alunos têm a possibilidade de definir caminhos próprios co-responsabilizando-se na sua própria aprendizagem e na dos outros (Blunk, 1998). O trabalho em pequeno grupo oferece, um ambiente propício para que uma comunicação rica sobre a matemática possa ter lugar (Curcio & Artz, 1998). As turmas organizadas para que os alunos trabalhem em pequenos grupos, permitem que todos participem activamente na aula, reduzindo o número de pedidos individuais de apoio ao professor, permitindo que se ajudem mutuamente e de forma autónoma (Civil, 1998; Stacey & Gooding, 1998).

No entanto, para que os alunos desenvolvam a capacidade de trabalhar em grupo é necessária muita prática, principalmente no que concerne a aprender a colocar em confronto as suas ideias com os restantes elementos do grupo (Blunk, 1998; Martinho, 2007). Só depois de conseguirem ultrapassar este obstáculo é que podem passar à etapa mais complexa que consiste em conseguir explicar as suas ideias argumentando e procurando convencer os restantes colegas das suas opiniões, assim como ouvir e contra-argumentar (Blunk, 1998; Martinho, 2007).

Assim, segundo alguns autores, as tarefas de investigação em grupo desenvolvem nos alunos várias capacidades, nomeadamente: explorar, conjecturar, justificar, provar e argumentar, assim como a capacidade de comunicar matematicamente e a autonomia (Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira & Oliveira, 1999; Segurado, 2002).

2.2.2. A argumentação e o raciocínio

A lógica matemática diz respeito ao estudo dos argumentos, ou seja, de raciocínios que permitem, de uma ou de mais proposições, retirar uma consequência (Reis, 2004). Um argumento é considerado um conjunto de raciocínios que dá origem a outros na procura de um final que é considerado a conclusão para o argumento inicial. Podemos falar de raciocínios argumentativos e de raciocínios lógicos. Os raciocínios argumentativos dirigem-se sempre a um auditório que se procura convencer e persuadir e não se podem desenvolver independentemente do auditório (Grácio, 1998).

Etimologicamente, raciocinar matematicamente remete para calcular, mas também para usar a razão, para julgar, compreender, examinar, avaliar, justificar e concluir, o que conduz a que, em Matemática, não raciocinamos apenas quando provamos algo, mas sempre raciocinamos ao apresentar razões que justifiquem afirmações (Boavida, 2008).

Na sala de aula de Matemática existem vários tipos de raciocínio. Polya (1968) distinguiu dois tipos de raciocínio, o *dedutivo* e o *plausível*. Sublinhou que entre eles existe uma grande distância, pois o primeiro é seguro e o segundo é incerto, provisório e controverso. No raciocínio *plausível* é possível adicionar novo conhecimento ao já existente. Considera que no raciocínio *dedutivo* é necessário saber distinguir entre uma prova e uma conjectura e entre uma demonstração válida e uma tentativa inválida. No raciocínio *plausível* é fundamental distinguir uma conjectura de outra conjectura e perceber qual delas é mais razoável. Polya (1968) defende ainda que os dois tipos de raciocínio completam-se e que devem ser ensinados em paralelo, devendo o ensino preparar os alunos para a invenção matemática adaptando-a de acordo com o nível de inteligência de cada um. Desta forma, os alunos são preparados para uma experiência matemática mais completa, mais realista e mais responsável. Mason, Burton e Stacey (1982) consideram que existem quatro processos de raciocínio presentes no pensamento matemático: *especialização*, *formulação de conjecturas*, *teste* e *justificação*. A *especialização* é fundamental na abordagem de um problema de forma indutiva, sendo utilizado na procura de regularidades ou na exploração de casos particulares. Após a *formulação de conjecturas* é fundamental encontrar possíveis *justificações* para uma melhor compreensão e validação ou refutação, reiniciando todo o processo caso seja necessário.

Ponte (1984) considera que é possível distinguir três tipos fundamentais de raciocínio na matemática: o lógico-dedutivo, o algorítmico e o intuitivo. O raciocínio *lógico-dedutivo* é usado na dedução e consiste basicamente em argumentos da forma "se...então". Este processo de raciocínio é basicamente de validação e de organização do conhecimento matemático. O *raciocínio algorítmico* é constituído por etapas sequenciais bem definidas e aplica-se na resolução de problemas semelhantes, em que em cada etapa a operação tem de ser bem definida. Este tipo de raciocínio é importante na resolução de problemas do dia-a-dia apesar de poderem ser várias as etapas para a sua resolução. No *raciocínio intuitivo* as etapas nem sempre são bem definidas pois, por vezes, as operações podem ser difíceis de observar ou de distinguir. Na sua grande parte são substituições, generalizações, associações, etc. Assim, o raciocínio intuitivo é fundamental no acto de criar e de aprender matemática.

Ponte (1984) considera que "No ensino da matemática, o raciocínio lógico-dedutivo e o intuitivo tendem a ser sufocados pela grande ênfase dada aos algoritmos e aos procedimentos" (p. 10). Os alunos, desta forma tendem a desenvolver uma visão distorcida da matemática, não entendendo como certo conceito é criado e aplicado. A maior parte dos alunos pensa que a matemática se reduz a um conjunto de regras e que para resolver um problema só é fundamental relembrar e aplicar as referidas regras. No caso particular da interpretação gráfica, esta é de natureza aberta pois requer um grande número de estruturas conceptuais criativas de acordo com cada situação. Na interpretação gráfica intervêm o raciocínio intuitivo, considerando este como o processo de recolha de informações através da interpretação gráfica (Ponte, 1984).

Também Greenes e Findell (1999) consideram que existem dois tipos de raciocínio: o dedutivo e o indutivo. O raciocínio *dedutivo*, está presente quando os alunos resolvem problemas e quando tiram conclusões a partir de diagramas, gráficos ou tabelas. O raciocínio *indutivo* envolve o exame de casos particulares, identificando as relações entre esses casos, e a generalização dessas relações. Por exemplo, a generalização de uma regra ou função que descreve a relação entre qualquer termo ou objecto e a sua posição numa sequência de regras que podem ser na forma de palavras, símbolos ou gráficos (Greenes & Findell, 1999).

Ayalon e Even (2006) salientam que o raciocínio *dedutivo* é o único em que as conclusões derivam das informações previamente dadas e assim não existe a necessidade de serem provadas através de experiências. Uma forma de inferir o método dedutivo é o silogismo que inclui três afirmações: duas premissas (ou créditos) e uma conclusão lógica que é deduzida a partir delas. Grandes cientistas como Descartes e Popper demonstraram a importância do raciocínio *dedutivo* para a ciência em geral. O facto é que "um mundo sem dedução é um mundo sem a ciência, tecnologia e um sistema jurídico" (Ayalon & Even, 2006, p.90).

Este tipo de raciocínio é, por vezes, usado como sinónimo de pensamento matemático e desempenha um papel fundamental na construção de justificações e provas matemáticas. Tendo em consideração que um dos objectivos do ensino aprendizagem da matemática é o de melhorar o raciocínio *dedutivo*, o estudo desenvolvido por Ayalon e Even (2006) mostrou que o seu significado não é aceite por todos os educadores matemáticos da mesma maneira.

Nas últimas décadas, na investigação e educação matemática, o ensino e aprendizagem da álgebra mereceu um grande interesse, devido aos alunos manifestarem algumas dificuldades na sua compreensão. Para alguns investigadores os problemas e as dificuldades dos alunos relativamente ao *raciocínio algébrico* devem-se ao seu grau de abstracção. O raciocínio *algébrico* pressupõe que partindo da observação de um determinado conjunto de evidências, os alunos façam a generalização das ideias matemáticas através das argumentações (Blanton & Katput, 2005).

Segundo Breiteig e Grevholm (2006), num estudo desenvolvido com alunos do ensino secundário, verificaram que estes preferem explicar os problemas dados na retórica do que na álgebra formal. A discussão de soluções alternativas a uma determinada tarefa pode desencadear nos alunos uma consciencialização de uma forma própria de explicar (Breiteig & Grevholm, 2006). Assim, os alunos ao serem envolvidos em muitos exemplos e actividades desenvolvem as suas habilidades de *raciocínio algébrico* (Breiteig & Grevholm, 2006).

Na educação matemática, em todos os níveis de ensino, é dada grande importância ao raciocínio chamando a atenção à argumentação matemática e à justificação (Yackel & Hanna, 2003). Apesar da actividade de argumentação ser uma componente do raciocínio essencial na construção do conhecimento matemático, vários estudos realizados têm verificado que esta prática não se encontra presente em algumas salas de aula, por ser uma tarefa complexa que requer ambientes propícios ao desenvolvimento da capacidade argumentativa dos alunos (Boavida et al., 2002).

2.2.3. A argumentação e a prova

A dificuldade que os alunos manifestam na prova matemática e na procura de possíveis caminhos para a resolução de situações problema, torna mais premente que desenvolvam a capacidade de raciocinar e de argumentar matematicamente, enquanto elementos pertencentes a uma comunidade escolar e social (Boavida et al., 2002; Boavida, 2005a). Assim, é fundamental que na sala de aula se comecem a colocar aos alunos questões cada vez mais produtivas, de forma a estimular a formulação e teste de conjecturas (Ponte et al., 1999). Este processo pode dar origem à tomada de consciência dos alunos da necessidade de terem de ser recolhidos mais dados, de rejeitar as primeiras conjecturas formuladas e de formular novas conjecturas (Ponte et al., 1999). Torna-se então fundamental estabelecer argumentos plausíveis e provas, de modo a validar ou rejeitar as conjecturas previamente formuladas. O processo evidenciado por Ponte et al. (1999) aproxima a investigação desenvolvida pelos alunos à de um matemático (Oliveira, 1998a, 1998b). Esta actividade de investigação envolve vários processos matemáticos que estão ilustrados de uma maneira simplificada na figura 3.

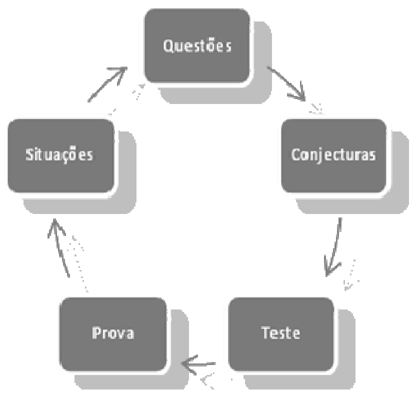


Figura 3. A actividade de investigação (adaptado de Oliveira, 1998a)

Numa primeira fase, tem-se a interrogação sobre a situação, ou seja, a formulação de uma ou de mais questões sobre aquilo que se vai trabalhar e a observação é fundamental nesta fase, na procura do que pode ou parece ser regular. A partir do momento em que surgem as conjecturas, estas são frequentemente acompanhadas do teste. À medida que as conjecturas vão sendo validadas pelos vários testes, vai sendo provada a sua veracidade. No entanto, se o teste falhar, ter-se-á de voltar atrás, à conjectura inicial (refutando ou abandonando), interpretando a questão de outra maneira e formulando novas conjecturas diferentes da inicial.

Caso a conjectura passe o teste ter-se-á de demonstrar a sua veracidade, de forma a deixar de ser apenas uma conjectura e tornar-se numa propriedade matemática. Obviamente que este ciclo pode ser interrompido em qualquer uma destas etapas e assim ter de se rever o percurso que foi efectuado até aquele momento, podendo-se inverter a ordem das etapas ou passar por alto algumas delas. O facto é que a mesma situação pode dar origem a várias questões, fazendo com que o aluno possa ter de percorrer o ciclo muitas vezes (Oliveira, 1998a).

Formulação e teste de conjecturas

Segundo Putman, Lampert e Peterson (1990), na Matemática tem sido dada muita importância à demonstração de uma conjectura e não tanto ao processo que deu origem à sua formulação. A formulação de conjecturas, segundo Mason et al. (1982) é o processo de supor ou de perceber se uma afirmação é verdadeira, o que induz a necessidade de investigar a sua veracidade. Segundo estes investigadores "uma conjectura é uma afirmação que parece razoável, mas cuja verdade não está demonstrada" (p.71). No entanto, o processo que envolve a formulação de conjecturas pode-se representar por um processo cíclico que envolve uma sequência de várias fases, nomeadamente: formular uma conjectura acreditando na sua veracidade; verificar se a conjectura é válida para todos os casos conhecidos; colocar em causa a veracidade da conjectura tentando encontrar um contra-exemplo, na tentativa da sua refutação; compreender a razão pela qual a conjectura é válida ou como é que poderá ser alterada (Mason et al., 1982).

Pedemonte (2002) define uma conjectura como uma afirmação estritamente conectada com uma argumentação e um conjunto de concepções pois, como refere Balacheff (1994), algumas concepções permitem a construção de argumentações que a justifiquem. As conjecturas são sempre postas em causa e quando não se consegue encontrar um contra-exemplo que as refute deve-se tentar procurar e explicar o porquê, no intuito de se produzir uma argumentação matematicamente válida e convincente (Pedemonte, 2002).

Mason et al. (1982) consideram que o processo de formulação de conjecturas advém dos processos de generalização e de especialização, de forma automática. O processo de *generalização* inicia-se quando se encontra uma regularidade, isto é, quando, após a análise de vários exemplos, se verifica que existem características comuns a todos eles. Por outro lado, o processo de *especialização* consiste em iniciar a investigação com exemplos particulares, escolhidos a partir de uma situação mais geral, e tem como objectivo fundamental tentar entender uma questão previamente colocada, clarificando as suas ideias.

No entanto, apesar de na maior parte das vezes ser fácil formular uma conjectura, verifica-se que para os alunos não é fácil justificá-la (Mason et al., 1982). Estes investigadores consideram que para os alunos justificarem as suas conjecturas é necessário encontrarem alguma razão ou estrutura, que enquadre o argumento, ou seja, que estabeleça uma ligação entre o que se sabe e o que se pretende justificar.

Brocardo (2001) afirma que quando se formula e testa uma conjectura, esta não adquire automaticamente o estatuto da verdade matemática. É fundamental, procurar argumentos válidos que a justifiquem e a este processo chama-se demonstração ou prova e tem sido amplamente estudado e discutido em investigações de carácter matemático. Os termos demonstração, prova e argumentação não são sempre usados com o mesmo significado.

Lakatos (1976) considera que uma demonstração tem uma dupla função: um meio de comunicação e uma ferramenta privilegiada de prova pois permite estabelecer que um determinado enunciado é um teorema. Ao realizar a demonstração, o aluno mostra se o que compreendeu o que aprendeu. A demonstração deve aparecer como um meio num debate ou como uma forma de verificar a validade de uma afirmação. É necessário que a demonstração não seja somente levar o aluno a obter uma nova racionalidade, mas sim criar as condições para que ele desenvolva uma racionalidade adequada a si próprio. Para Lakatos (1976) a formulação dos contra-exemplos, leva a que o teorema seja reformulado e a demonstração alterada, corrigindo-a e melhorando-a.

No seu livro, Davis e Hersh (1995) ilustraram com o seguinte esquema o método da teoria de Lakatos:

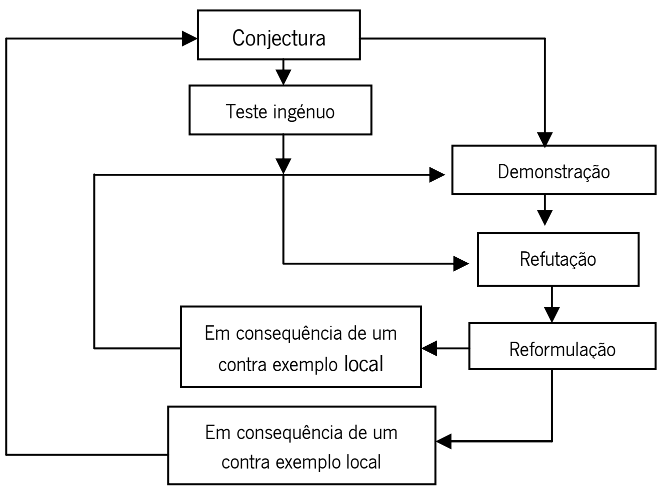


Figura 4. Esquema do modelo simplificado de Lakatos (adaptado de Davis & Hersh, 1995)

Este modelo é defendido por Lakatos (1976) e, para este matemático, está na base do desenvolvimento do conhecimento matemático. Para Lakatos (1976) a demonstração não é estanque, pois implica um conjunto de explicações e de justificações que a tornam cada vez mais plausível e mais convincente. A matemática tal como as ciências naturais é falível pois também se desenvolve a partir da crítica e da correcção de teorias que não estão livres de qualquer ambiguidade, engano ou erro. Ao partir de um problema ou da formulação de uma conjectura é fundamental que exista uma "pesquisa simultânea de demonstrações e contra-exemplos" (Lakatos, 1976, p.324).

Relativamente aos construtos de Lakatos, os investigadores Larsen e Zandich (2008) consideram-nos um quadro útil para que faça sentido a actividade matemática na sala de aula, onde os alunos são desafiados para o desenvolvimento das ideias matemáticas e lhes são fornecidas instruções heurísticas para abordagens que defendem uma aprendizagem da disciplina, através de um processo orientado de reinvenções.

Particularmente, quando os alunos efectuam as suas primeiras experiências em que é fundamental formular e avaliar conjecturas, verifica-se que a maioria dos alunos concluem a veracidade destas para a generalidade de objectos de um determinado universo, a partir apenas da verificação de um número pequeno de casos observados e testados (Boavida et al., 2008). Para Balacheff (1988), este tipo de procedimento de validação de uma afirmação é considerado o primeiro nível da hierarquia: *empirismo naïf*, pois os alunos a partir da observação de um pequeno número de caso, têm a certeza da veracidade de uma afirmação. No entanto, outras vezes os alunos trabalham de forma mais explícita com a generalização, quando observam muitos exemplos e analisam até alguns casos, aos quais normalmente não recorremos, para efectuar a validação de uma conjectura (Boavida et al., 2008). Este procedimento efectuado é demonstrativo de uma evolução dos alunos e é considerado por Balacheff (1988), correspondente ao segundo nível da hierarquia: a *experiência crucial*.

No entanto, alguns alunos continuam a persistir na ideia de que para testarem a validade de uma conjectura apenas é necessário observar e verificar determinados casos. Este facto, não é propriamente estranho pois muitas das decisões que são tomadas no dia-a-dia baseiam-se essencialmente num raciocínio do tipo indutivo (Boavida et al., 2008). No entanto, na Matemática este tipo de raciocínios, assim como os argumentos empíricos não são suficientes para que se permita efectuar uma fundamentação de conclusões gerais. Portanto, torna-se fundamental incutir e ajudar os alunos, desde cedo, a perceberem que o facto de verificar uma afirmação a partir de exemplos, não permite ter uma garantia de que a conjectura formulada é válida para casos que não foram previamente analisados (Boavida et al., 2008).

Da conjectura à prova

Para que os alunos tenham a certeza de que a conjectura que formularam é válida é necessário que encontrem uma justificação para o porquê da sua veracidade, ou seja, é fundamental que produzam uma prova matemática para conjectura previamente formulada (Boavida et al., 2008).

No entanto, para se produzir uma prova, em primeiro lugar, é necessário ter noção do que significa afirmar, aferir a segurança dessa afirmação, assim como o que é o regime de prova e outras noções associadas (Harel & Sowder, 1998). As afirmações diferem em três características importantes: (1) a originalidade, (2) a maneira de pensar e (3) a segurança. A *originalidade* refere-se à *inovação*, quando um aluno ao resolver um problema pensa por si próprio e produz a solução, por outro lado, refere-se à *imitação*, quando um aluno reproduz a solução da forma como lhe foi comunicada. A *maneira de pensar* refere-se ao modo como as afirmações são realizadas. Por exemplo, uma afirmação pode ser efectuada por abstracção de fenómenos de várias afirmações empíricas, ou por experiências do pensamento sem a mediação de afirmações empíricas. Uma afirmação pode ser concebida como uma conjectura ou como um facto.

Os regimes informais dedutivos estão relacionados com as formas não muito elaboradas de provas matemáticas que os professores de matemática usam frequentemente na sala de aula (Recio & Godino, 2001). São argumentações com uma forte componente intuitiva, incluindo visualização (por exemplo, as provas do cálculo diferencial com base em representações gráficas de funções).

Os regimes de prova dedutiva dos alunos estão relacionados com as formas habituais que os matemáticos e os professores de matemática usam como demonstração (Recio & Godino, 2001). O regime de prova informal não deve ser considerado simplesmente errado, equivocado ou deficiente, mas sim como uma etapa do raciocínio matemático necessária para alcançar e dominar as práticas matemáticas argumentativas.

Os argumentos analíticos que são característicos de provas matemáticas, não se confundem com as práticas de argumentação utilizadas apenas pelos matemáticos para se convencerem sobre a veracidade das conjecturas. Estes procedimentos de raciocínio são muitas vezes infrutíferos, ou até mesmo um obstáculo, na fase de descoberta criativa de um processo de resolução de problemas no qual é permitido e até necessário implementar formas substanciais de argumentação, nomeadamente, indução empírica e analogia (Recio & Godino, 2001).

A compreensão e domínio da argumentação dedutiva pelos alunos requer um desenvolvimento da racionalidade e um estado de conhecimento específico (Recio & Godino, 2001). A prova como um processo dedutivo em que as premissas dão origem à conclusão, tradicionalmente tem sido aplicada no ensino da geometria e não no da álgebra (Harel & Sowder, 1998).

Quando a *prova dedutiva* é bem construída oferece aos alunos a forma mais pura de raciocínio para estabelecer a certeza (Gholamazad, Liljedahl & Zazkis, 2003). Assim, como já foi referido anteriormente, a prova desempenha um papel fundamental não apenas na prática matemática como também no ensino e aprendizagem da matemática. No entanto, a investigação tem vindo a mostrar que a prova e a capacidade de gerar provas é difícil para a maioria dos alunos (Gholamazad et al., 2003). Estes investigadores apresentam o diagrama da figura 5, que representa os passos que os alunos têm de percorrer de forma a efectuar uma prova correcta e completa. Na organização deste diagrama consideraram-se as etapas a serem percorridas pelos alunos de forma a obter uma prova correcta e completa e representar também os potenciais obstáculos em cada etapa (Gholamazad et al., 2003).

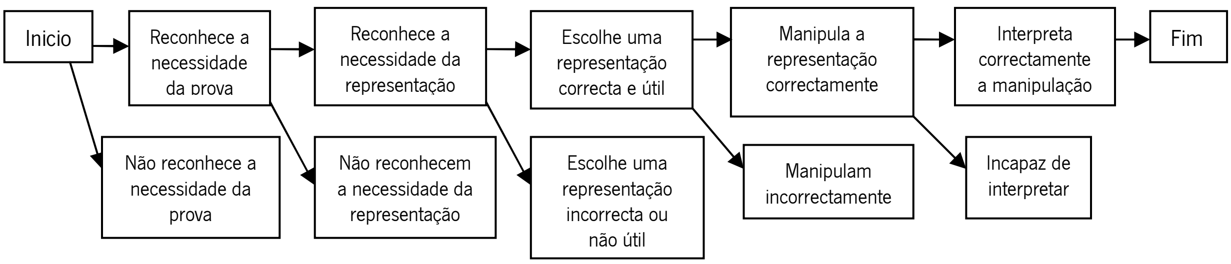


Figura 5. Processo de prova (adaptado de Gholamazad et al., 2003)

A formulação de conjecturas e o desenvolvimento da prova são dois aspectos fundamentais do trabalho de um matemático profissional (Alibert & Thomas, 1991). Para estes investigadores a conjectura e a prova têm um carácter dual. Em primeiro lugar, há o lado pessoal que visa esclarecer a posição que o investigador tenha atingido no seu próprio entendimento, através da demonstração de hipóteses explícitas. Em segundo lugar, há o lado colectivo, onde uma conjectura é proposta para a reflexão de outros matemáticos de forma a compartilhar ideias por insegurança da sua veracidade. Assim, uma prova pode ser definida como um meio de convencer-se a si próprio mesmo quando tenta convencer os outros (Alibert &

Thomas, 1991). No entender de Hadji (2001) "a prova é um discurso sobre o discurso que se quer estabelecer e que se pretende que exprima bem a realidade do real" (p.74).

Villiers (1990) considera que a prova matemática tem várias funções: a verificação (preocupação com a verdade do enunciado); a explicação (introspecção sobre o porquê da verdade); a sistematização (organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas); a descoberta (descoberta e invenção de resultados novos); e a comunicação (transmissão do conhecimento matemático). Ao modelo de Villiers, as investigadoras Hanna e Jahnke (1996), associaram ainda as funções: de construção de uma teoria empírica; de exploração do significado de uma definição ou da consequência de uma suposição; e de incorporação de um facto bem conhecido num quadro novo que permite visualizá-lo sob uma nova perspectiva. No entanto, as funções da prova mais promissoras para a educação matemática são a comunicação e a explicação (Yackel & Hanna, 2003).

A prova desempenha um papel preponderante em Matemática (Gholamazad et al., 2003). Assim, "a prova é uma característica essencial da disciplina de matemática e é uma componente fundamental na educação matemática" (Hanna & Jahnke, 1996, p. 877), e ainda é um instrumento importante para a promoção da compreensão da matemática, na sala de aula. Knipping (2004) considera que as argumentações são processos colectivos em que o professor e os alunos desenvolvem em conjunto a prova matemática.

Os métodos de justificação, em determinadas situações, podem ser ferramentas de ensino, adequadas e eficazes. Hanna e Jahnke (1996) referem que até os matemáticos mais experientes preferem a prova que explique, ou seja, a prova criadora do entendimento. É primordial, que na prova não só se considere "o conhecimento de que" mas também "o conhecimento do porquê" (p.905). Balacheff (1988, 1999) distingue dois tipos de prova: as pragmáticas e as intelectuais. Nas provas *pragmáticas* as declarações são validadas por acções concretas e mentais. As provas deste tipo incluem um empirismo ingénuo ou experimentos cruciais. Por outro lado, os argumentos em provas *intelectuais* são baseados em conceitos e na linguagem. As provas intelectuais não são necessariamente formais, no entanto são independentes das acções concretas. A análise dos discursos na sala de aula e das argumentações colectivas são importantes para se compreender melhor o tipo de prova intelectual e a sua importância no ensino (Balacheff, 1988, 1999).

Vários matemáticos e educadores matemáticos têm desafiado o princípio de que o aspecto mais significativo da Matemática é o raciocínio por dedução, culminando em provas formais (Hanna, 1991). No entanto, há muito mais para a Matemática do que apenas os sistemas formais. Esta visão reconhece as realidades da prática matemática. Os matemáticos admitem que as suas provas podem ter diferentes graus de validade formal e podem obter o mesmo grau de aceitação. Hanna (1991) considera que quando uma prova é válida em virtude da sua forma única, sem olhar para o seu conteúdo, é provável que acrescente muito pouco para a compreensão do seu assunto e pode até nem ser convincente.

Knipping (2004) observou outro tipo de provas nas práticas desenvolvidas na sala de aula, em que cada um argumenta visualmente e ao mesmo tempo mentalmente, independentemente da representação concreta. Neste caso, a prova visual combina argumentos baseados em exemplos genéricos e em experiências mentais.

Apesar da prova ser fundamental para o raciocínio matemático, o vocabulário da verdade matemática, o rigor e a certeza não é um *habitat* natural para a maioria dos alunos. O mundo dos alunos é mais empírico, baseando-se na modelação, na interpretação e nas aplicações (Steen, 1999). Apenas alguns alunos, compreendem a prova como os matemáticos a compreendem, ou seja, como uma dedução lógica, rigorosa das conclusões a partir das hipóteses (Dreyfus, 1990). Os alunos geralmente não compreendem o que significa a prova na matemática e não reconhecem a sua importância (Schoenfeld, 1991).

Embora os matemáticos, muitas vezes advoguem a inclusão da prova nos currículos escolares para que os alunos possam aprender a natureza lógica da Matemática, o contributo mais significativo da prova na educação matemática pode ser o seu papel na comunicação do entendimento matemático (Steen, 1999). Assim, uma questão importante sobre a prova não é verificar se é fundamental para a compreensão da natureza da matemática como uma ciência lógica e dedutiva, mas se ajuda os alunos e os professores a comunicarem matematicamente (Steen, 1999).

Rodd e Monaghan (2002) mostraram que a aprendizagem da prova de uma forma matematicamente aceitável, é difícil quer para alunos do ensino secundário quer para alunos do ensino superior. A comunicação de uma explicação é considerada por Rodd e Monaghan (2002) como uma base para o raciocínio e para a prova, e a lógica é o cerne da prova matemática. Existem diferentes estruturas lógicas que são usadas dentro da prova matemática, nomeadamente: dedução passo a passo, prova por contradição e contra-exemplo.

Relativamente aos sistemas de prova por exemplos e por contra-exemplos, Harel e Sowder (1998) observaram os seguintes comportamentos: a) os alunos continuam a provar matematicamente por exemplos; b) os alunos não protestam quando apresentam uma prova por indução; c) as provas indutivas dos alunos, a maior parte das vezes, consideram apenas um exemplo, em vez de múltiplos exemplos; d) os alunos raramente apresentam provas através de contra-exemplos e parece que não estão convencidos da sua aplicação.

Várias investigações efectuadas em Educação Matemática sobre a prova revelaram que alguns alunos têm dificuldades na prova por contradição e que este tipo de argumentação só é utilizado em determinadas situações. Por exemplo, Antonini (2003) mostrou que existem alguns processos que estimulam os alunos a realizar uma prova por contradição. Em particular, é importante referir que existe uma ligação profunda entre os contra-exemplos que são gerados durante a fase de produção de conjecturas e a estrutura da argumentação com a qual a conjectura é justificada. Algumas investigações descrevem a prova por contradição como uma argumentação que os alunos traduzem de uma forma espontânea, ou seja, como argumentação indirecta. Neste caso, é importante que sejam estudadas as condições favoráveis para que sejam geradas argumentações desse tipo (Antonini, 2003). O estudo realizado por Antonini (2003), teve como objectivo investigar os processos que dão origem à construção de uma argumentação indirecta e concentrou-se em alguns factores que favorecem esse tipo de argumentação. Antonini (2003) iniciou esse estudo com a análise dos processos de construção de uma conjectura e verificou que os alunos ao resolverem tarefas de investigação podem produzir um ou mais exemplos que podem ser subdivididos em duas classes, nomeadamente, os que verificam as condições da tarefa proposta e os que não verificam.

Relativamente aos exemplos que não verificam as condições de uma dada tarefa, denominados por contra-exemplos, os alunos parecem construir argumentações indirectas (Antonini, 2003). Do ponto de vista didáctico é fundamental que os alunos sejam orientados no sentido de tomarem consciência da importância da estrutura das suas argumentações para que lhes seja dada a oportunidade de construírem uma prova por contradição a partir da argumentação indirecta produzida. A produção de um teorema parece estar relacionada com a produção da conjectura, passando pela argumentação e chegando finalmente à prova (Antonini, 2003).

Antonini e Mariotti (2006) desenvolveram um estudo que se concentrou numa análise ao nível cognitivo e didáctico com o objectivo de realizar uma descrição e interpretação das dificuldades reveladas pelos alunos na *prova por contradição* dentro do mais amplo contexto das actividades de prova em matemática. A partir da noção matemática de teorema fizeram uma análise estrutural das provas por contradição e produziram um modelo, a observação, análise e interpretação das questões de carácter cognitivo e didáctico, relacionadas com este tipo de prova. O modelo destacava o complexo relacionamento entre a declaração original (prova por contradição de uma declaração dada) a ser provada e uma nova declaração (instrução secundária) que é realmente comprovada. Assim, estes investigadores realizaram uma análise das dificuldades cognitivas dos alunos relativas ao relacionamento entre a teoria de referência e a prova de uma instrução secundária. Parece que o facto de as hipóteses serem falsas pode induzir nos alunos impasses e dúvidas sobre o processo de prova, pois perdem a noção dos passos dedutivos da prova devido a não terem consciência do que é verdade e do que é falso (Antonini & Mariotti, 2006).

Dreyfus (1999) procurou identificar algumas razões para o facto das concepções dos alunos, acerca de explicação e de prova, serem limitadas. Dreyfus (1999) concluiu que os alunos ao serem obrigados a explicar e justificar os seus raciocínios, são estimulados a fazer a difícil transição de uma visão computacional da matemática para uma visão que concebe a matemática como um campo de estruturas intrinsecamente relacionadas. Assim, os estudantes têm necessidade de desenvolver formas novas e mais sofisticadas de conhecimento (Dreyfus, 1999).

Healy e Hoyles (2000) desenvolveram um estudo com alunos do ensino secundário sobre as suas ideias acerca da prova na álgebra. Descobriram que os argumentos empíricos predominam nas construções de prova desenvolvidas pelos alunos e apenas alguns deles estão conscientes das suas limitações. A grande maioria utiliza a linguagem racional e não a algébrica para provar.

O processo de prova é extremamente complexo pois envolve várias competências nos alunos, nomeadamente: identificar hipóteses, isolar propriedades e estruturas dadas e organizar argumentos lógicos. Esta complexidade pode ser maior devido à natureza ambígua do próprio termo prova e pelo facto de exteriormente à matemática, a prova ser indistinguível da evidência (Hearly & Hoyles, 2000). O processo de prova inclui dois sub-processos: determinação e persuasão. A *determinação* é o processo que uma pessoa emprega para remover as suas próprias dúvidas acerca da veracidade de uma observação e a *persuasão* é o processo que uma pessoa emprega para remover as dúvidas de outros acerca da veracidade de uma observação. Assim numa afirmação mantém-se uma conjectura até que se chegue à certeza absoluta da sua verdade, no entanto, uma conjectura não é viável sem que haja um certo grau de convicção na sua veracidade (Harel & Sowder, 1998).

Pedemonte (2002) usou o modelo de Toulmin como uma ferramenta poderosa para comparar o processo de argumentação e de prova. É possível comparar as garantias da argumentação e as garantias da prova. Por exemplo, se a garantia é uma argumentação que está relacionada com uma concepção intuitiva, é possível ver se a sua prova se torna um teorema de uma teoria ou ao contrário se se mantém ao nível da concepção (Pedemonte, 2002). A análise realizada sobre os protocolos dos alunos destaca profundas semelhanças entre os argumentos apresentados durante a construção de uma conjectura e posteriormente com a prova produzida. Tais semelhanças dizem sobretudo respeito aos conteúdos dos argumentos. No entanto, uma análise cuidadosa efectuada em relação à estrutura da organização dos argumentos, podem revelar-se interessantes discrepâncias.

Das diferentes pesquisas já efectuadas regista-se alguma heterogeneidade entre a argumentação e a prova, ao nível social e do ponto de vista epistemológico (Balacheff, 1988) e ao nível cognitivo e do ponto de vista linguístico (Duval, 1991, 1995). A pesquisa efectuada por Duval (1991, 1995) mostrou que há diferenças estruturais entre a argumentação e a prova, pois as inferências em argumentação baseiam-se no conteúdo enquanto na prova segue um esquema dedutivo (dados, reclamação e regras de inferência). No entanto, outros estudos suportam o modelo dedutivo da prova matemática e mostram que a fase de processo e de controlo das provas seguem critérios baseados no conteúdo em vez de critérios formais (Thurston, 1994).

O contexto em que os alunos encontram as provas matemáticas, pode influenciar as suas percepções do valor da prova. Ao criar-se um ambiente no qual os alunos podem experimentar em primeira mão o que é necessário para convencer os outros quanto à verdade ou falsidade das proposições, a prova torna-se num instrumento de valor pessoal que os tornará mais felizes se poder ser usada numa situação futura (Alibert & Thomas, 1991).

Embora os alunos de todos os níveis de ensino enfrentem sérias dificuldades com a prova, há um número limitado de investigações sobre como ajudar os alunos a superar essas dificuldades. Stylianides e Stylianides (2009) consideram que apesar de a prova ser vista como um elemento essencial da actividade matemática e um elemento essencial para a aprendizagem profunda em matemática, a pesquisa indica que os alunos em todos os níveis de educação tendem a ter esquemas de justificação que se desviam da noção de prova matemática. Ou seja, os alunos tendem a formular e a aceitar argumentos empíricos como generalizações das provas matemáticas.

2.2.4. A argumentação: constrangimentos e dificuldades

Tal como a noção de prova, também a de argumentação admite vários significados e diferentes formas de rigor na prática escolar. Os alunos ao argumentarem de forma a defenderem os seus pontos de vista, por vezes não apresentam verdadeiras razões que determinem que as suas ideias estão correctas. A argumentação tem de ser usada pelos alunos, simultaneamente, como uma forma de investigação e como uma maneira de explicar e de defender as suas conclusões. Para o aluno preparar a sua argumentação tem de ter presente os argumentos que sustentam diferentes pontos de vista, defender as suas conclusões e avaliar de forma crítica alguns argumentos relativos aos pontos de vista opostos (Weston, 1996).

Para que se crie uma comunidade matemática, dentro da sala de aula, em que os alunos sejam bons ouvintes e em que o respeito, a confiança e a inter-ajuda estejam presentes, é fundamental que haja uma transformação no ensino e na aprendizagem. É importante que nas discussões desenvolvidas, dentro da sala de aula, se consigam gerir os desacordos sobre diferentes ideias matemáticas. Por vezes, alguns dos desacordos entre alunos podem dar origem a confrontos que em nada contribuem para a aprendizagem. Como refere Boavida (2005b, p.116), "há desacordos não produtivos" pois não são "acompanhados de reflexão". O facto é que os alunos podem-se sentir incomodados quando as suas ideias são submetidas às críticas da turma relativamente (Lampert, 2001). Então torna-se fundamental que haja uma consciencialização das diferentes formas que os alunos podem usar na resolução dos desacordos nas discussões, para que na sala de aula os acontecimentos convirjam no sentido de uma aprendizagem da Matemática em que todos se sintam seguros e confiantes em expressar as suas ideias (Lampert, 2001).

Os alunos têm de tomar consciência de que os desacordos são normais e fundamentais na sua aprendizagem (Martinho, 2007). Para tal, têm de ser incentivados a desenvolver a argumentação matemática de modo a explicitar as suas ideias e a validar ou refutar o que ouvem, de forma consensual. A explicitação dos desacordos é fundamental para que a argumentação em Matemática se desenvolva visto que, na sala de aula, discutem-se ideias e não capacidades (Wood, 1999; Martinho, 2007).

As actuais orientações curriculares na Matemática dão especial ênfase à necessidade de se criarem, na sala de aula, contextos diversificados em que a explicação e a justificação de ideias e procedimentos matemáticos tenham um lugar de destaque (Boavida et al., 2008). Torna-se assim, fundamental valorizar no processo de ensino e aprendizagem o envolvimento de todos os alunos em actividades argumentativas em qualquer tópico matemático e não apenas em alguns temas ou em ocasiões particulares em que se exploram determinado tipo de tarefas (Boavida et al., 2008). A argumentação deve ter lugar de destaque na sala de aula independentemente de as tarefas exploradas serem de carácter mais aberto ou fechado.

É importante, que os alunos desenvolvam os três hábitos seguintes: (i) tratar as afirmações como conjecturas tentando alterar a perspectiva da disciplina de Matemática, em que tudo é errado ou certo, desenvolvendo a capacidade de testar e de modificar as afirmações com o intuito de serem encontradas justificações convincentes; (ii) testar conjecturas, assim como o de justificá-las; e (iii) ter um olhar crítico relativamente aos argumentos apresentados pelos seus colegas (Fonseca, 2000). Portanto, se os alunos forem desafiados e estimulados, ao longo da sua escolaridade, a uma "prática permanente da argumentação em defesa das suas afirmações" vão construindo uma ideia cada vez mais correcta do significado, da necessidade e importância da prova na Matemática (Veloso, 1998, p.374).

Portanto, os alunos do ensino secundário devem ser capazes de desenvolver raciocínios em que se façam e testem conjecturas, formulem contra-exemplos na procura de uma sequência de argumentos lógicos, julguem a validade desses mesmos argumentos e construam argumentos simples e válidos. Fazer e testar as conjecturas constitui a base da prova em matemática (NCTM, 1991). Se for encontrado um contra-exemplo a conjectura é considerada falsa e então é refinado e processo começando tudo de novo. Se não encontramos contra-exemplos, existe razão para acreditar que é verdade e é tentada a prova dedutiva. A tecnologia pode desempenhar um importante papel neste processo de decisões dado que permite aos alunos formular, testar e explorar as suas conjecturas (Hirschhorn & Thompson, 1996).

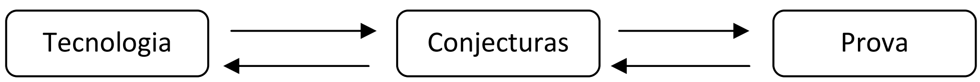


Figura 6. Modelo para o ensino do raciocínio (adaptado de Hirschhorn & Thompson, 1996)

CAPÍTULO 3

A calculadora gráfica

Este capítulo centra-se na utilização da calculadora gráfica e está subdividido em várias secções: inicialmente é feita uma breve resenha histórica sobre a sua evolução, seguem-se algumas situações da utilização da calculadora gráfica na sala de aula e finalmente particularizar essa utilização no tema das funções.

3.1. Evolução histórica da calculadora

Ao longo dos tempos o homem tem realizado uma procura incessante de ferramentas que lhe facilitem a realização de tarefas morosas e que lhe permitam realizar investigações com o intuito de desenvolver o seu conhecimento matemático. Uma dessas ferramentas de carácter tecnológico foi a máquina de calcular.

Muitos foram os matemáticos que ao longo de vários anos contribuíram para o desenvolvimento da máquina de calcular que actualmente é utilizada nas salas de aula. Os precursores das primeiras máquinas de calcular mecânicas foram Wilhelm Schickad (1592-1635) e Blaise Pascal (1623-1662). Em 1623, o matemático Schickad construiu a primeira máquina de calcular mecânica de somar e de subtrair, no entanto, tal invenção não teve grande repercussão na época (Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes & Nápoles, 1998).

Posteriormente Pascal, em 1642 e após várias tentativas de construção e de concepção, obteve uma máquina de calcular de somar, subtrair e multiplicar. Na época Pascal conseguiu vender aproximadamente 30 exemplares e com a utilização desta máquina ajudou o seu pai que trabalhava nos impostos. Devido ao facto destas máquinas só efectuarem multiplicações através de somas sucessivas e divisões por subtracções sucessivas, limitaram significativamente o seu interesse prático. Anos mais tarde, em 1671, Gottfried Leibniz (1626-1716) idealizou um instrumento que para além de adições e subtracções também efectuava multiplicações e divisões. No entanto, na sua época a tecnologia mecânica ainda estava pouco evoluída e a construção da máquina de calcular idealizada por Leibniz, devido à sua complexidade, constituiu um trabalho impossível de concretizar. Só em 1820 viria a ser construída, por Charles-Xavier Thomas Colmar (1785-1870), a máquina de calcular idealizada por Leibniz, sendo vendidas mais de 1500 unidades em aproximadamente trinta anos.

A partir dos finais do século XIX generalizaram-se as máquinas de calcular comerciais, tornando-se famosa a máquina que Herman Hollerith (1860-1929) construiu com o objectivo de realizar o tratamento de dados do censo de 1890, nos Estados Unidos. Mais recentemente, no início dos anos 60 surgem as calculadoras electrónicas e nos anos 70 alguns modelos são minimizados sendo alguns de bolso. Os modelos mais simples de máquinas de calcular permitiam apenas efectuar as quatro operações aritméticas fundamentais, no entanto, os modelos mais sofisticados efectuavam também funções matemáticas mais complexas, nomeadamente, logarítmicas, exponenciais, trigonométricas, entre outras (Teixeira, et al., 1998).

Em 1985, a equipa chefiada por Hides Fukaya, da Casio Japão lança uma nova máquina de calcular que deu origem a uma revolução em todo o ensino e aprendizagem da Matemática. Surge assim, a primeira calculadora gráfica que pelo facto de ser facilmente transportável e de baixo custo, possibilitou estar ao alcance de todos, nomeadamente alunos e professores. Com esta ferramenta houve a possibilidade e a facilidade de poder ser utilizada dentro e fora da sala de aula e por este motivo começou a ser utilizada numa grande variedade de cursos do ensino superior e posteriormente no ensino secundário.

Demana e Waits (1992) referem que após se terem apercebido do valor da calculadora gráfica começaram a organizar cursos para que esta ferramenta fosse utilizada na universidade de Ohio, nos Estados Unidos (Tall, 1997). Com o aparecimento das calculadoras alterou-se a natureza do ensino da Matemática (Bright & Williams, 1995), particularmente na importância atribuída aos problemas da Matemática e nos métodos usados na investigação desses problemas (Burril, 1992). A calculadora gráfica alterou as actividades na sala de aula e levantou questões sobre a matemática que deve ser ensinada e consequentemente, sobre como devem ser elaborados os currículos, tendo em conta a sua utilização.

3.2. A calculadora gráfica nos currículos

Perante a evidente evolução da calculadora nos últimos anos, este instrumento tecnológico, naturalmente, veio influenciar a forma como actualmente é encarado o ensino e a aprendizagem da disciplina de Matemática. O facto é que, progressivamente a calculadora tem vindo a tomar lugar na escola, particularmente na sala de aula, desencadeando uma necessidade de se repensar as metodologias e os papéis que lhe podem ser atribuídos no ensino da Matemática. Para que as calculadoras gráficas surtam realmente efeitos positivos na educação é fundamental que se levem a cabo alterações ao nível do currículo (Burril, 1992; Demana et al., 1993). Mesmo que não sejam excluídos alguns tópicos tradicionalmente leccionados é necessário repensar as metodologias de trabalho na sala de aula.

No caso de Portugal, o currículo tem sofrido várias alterações ao longo dos tempos. Em particular, no mês de Julho de 1986 foi aprovada a Lei de Bases do Sistema Educativo e em consequência deu-se a renovação dos Currículos e dos Programas dos Ensino Básico e Secundário. Aumentou para 9 anos a escolaridade obrigatória e o ensino secundário foi alargado para mais um ano.

Em Abril de 1988, foi organizado pela Associação de Professores de Matemática um seminário em Vila Nova de Milfontes cujo tema foi a Renovação do Currículo da Matemática (APM, 2009). Nesse mesmo ano estava a decorrer uma reforma importante do sistema educativo com a elaboração dos novos programas para todas as disciplinas. Nesse seminário, a calculadora é referida como instrumento de utilização natural que coloca em causa o currículo tradicional. Assume-se que, para a sua utilização na sala de aula é necessário que se alterem os objectivos e as práticas pedagógicas.

No entanto, só no ano lectivo de 1995/96, surge a recomendação da utilização das calculadoras gráficas nas escolas. No entanto, o seu uso não era permitido nos exames nacionais (Rocha, 2001). Posteriormente, no ano lectivo de 1997/98 foi dado um grande passo quando surge no programa oficial da disciplina de Matemática a obrigatoriedade da utilização da calculadora gráfica nos exames nacionais (Ministério da Educação, 1997). A partir deste momento dá-se a generalização da utilização desta tecnologia e a polémica começa a dissipar-se.

No ano lectivo de 2001/02, o programa de Matemática para o ensino secundário salienta que as calculadoras gráficas são calculadoras científicas muito completas, que devem ser consideradas não apenas como instrumentos de cálculo mas como instrumentos que incentivam o espírito de pesquisa nos alunos. É importante que os alunos utilizem as calculadoras gráficas em actividades matemáticas de condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjecturas, de estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções e de investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática. O recurso à calculadora gráfica pode auxiliar assim, o aluno na compreensão dos conceitos matemáticos, no entanto, não deve ser utilizada em raciocínios básicos. Este programa salienta que "a calculadora gráfica dará uma contribuição positiva para a melhoria do ensino da Matemática" (Ministério da Educação, 2001, p.16).

Recentemente, no ano lectivo de 2009/2010, foi pela primeira vez aplicado o novo programa de matemática elaborado pelo Ministério da Educação (2007), em que nele consta que a utilização adequada da calculadora permite ao aluno concentrar-se nos aspectos estratégicos do pensamento matemático, na resolução de problemas e na investigação de regularidades numéricas.

Conforme foi referido anteriormente e em forma de síntese, a introdução e utilização da calculadora no currículo da disciplina de Matemática, em Portugal, foi efectuada de forma progressiva e tem vindo a sofrer algumas alterações ao longo dos anos desde o seu aparecimento (Tabela1).

Tabela 1. A calculadora no currículo da disciplina de Matemática de 1988 a 2007

Ciclos / Anos	Ensino Básico			Ensino Secundário
	1ºciclo	2ºciclo	3ºciclo	
1988	"Os alunos de todos os níveis de ensino devem ter oportunidade de utilizar correntemente calculadoras nas suas aulas de Matemática. Assim, todos os alunos deverão ter a todo o momento disponível a calculadora" (APM, 2009, p.70).			
1991		A calculadora deve ser utilizada.	A calculadora deve ser utilizada de forma adequada.	
1997				O uso da calculadora gráfica é obrigatório neste programa.
2001	"Todos os alunos devem aprender a utilizar não só a calculadora elementar mas também, à medida que progridem na educação básica, os modelos científicos e gráficos" (Ministério da Educação, 2001, p.71)			
2002	A máquina de calcular deve ser utilizada, não só para a sua vulgarização, mas principalmente pela segurança que dá como auxiliar em cálculos morosos e pela possibilidade de exploração e descoberta que pode permitir quando utilizada com imaginação.			O uso da calculadora gráfica é obrigatório neste programa.
2007	Os alunos devem ser capazes de usar a calculadora. A calculadora pode ser utilizada em tarefas de investigação e na resolução de problema.			

Várias têm sido as investigações sobre a utilização da calculadora gráfica no processo de ensino e de aprendizagem. Estas investigações têm-se centrado: - nas potencialidades desta tecnologia, no que se refere ao desenvolvimento de alguns conceitos, nomeadamente, o conceito de função; - no desempenho dos alunos que utilizam esta tecnologia em comparação com os que não a utilizam; - nos erros associados à utilização da calculadora gráfica; - na utilização das calculadoras em situações de avaliação formal; e - nas atitudes dos alunos face à utilização do calculadora gráfica (Rocha, 2001).

Actualmente, em Portugal, as novas tecnologias, constam das orientações metodológicas dos programas de matemática e desempenham um importante papel no ensino secundário. No entanto, num estudo realizado por Romano e Ponte (2009) verificaram que apesar das calculadoras gráficas serem actualmente um instrumento obrigatório na sala de aula não se tem verificado uma alteração dos objectivos, das tarefas ou das práticas lectivas. O facto é que com o aparecimento das primeiras calculadoras gráficas deu-se, uma alteração da forma com é encarado o ensino da Matemática colocando-se novas questões relativas à organização curricular desta disciplina.

3.3. A calculadora gráfica: contributos e dificuldades

A calculadora gráfica permite a experimentação, a investigação e a resolução de problemas, proporcionando uma nova dinâmica dentro da sala de aula e implicando assim, ambientes de aprendizagem interactivos e de exploração em que os alunos se envolvem no desenvolvimento das suas próprias ideias matemáticas (Dunham & Dick, 1994).

Na opinião de Yunkel (1995) "a calculadora gráfica é um instrumento poderoso para explorar, investigar e descobrir as várias relações matemáticas abstractas" (p.1). As calculadoras gráficas são, uma ferramenta que efectua cálculos e traça gráficos com rapidez e simplicidade facultando aos alunos mais tempo para o desenvolvimento de tarefas enriquecedoras, nas quais a compreensão dos conceitos e subsequentemente aprofundamento dos conhecimentos estejam presentes (Dick, 1992; Cardoso, 1995; Gómez, 1996; NCTM, 2008). Assim, o tempo que era dispendido em cálculos fastidiosos ou na elaboração de gráficos de funções pode actualmente ser aplicado na compreensão de conceitos e no aprofundamento de conhecimentos (Gómez, 1996). De facto, deixa de ser necessário despender tanto tempo com cálculos pois estes passam a ser realizados com a utilização da calculadora gráfica dando respostas a algumas questões como, por exemplo, no cálculo dos zeros de uma função, que só podiam ser determinados com manipulações algébricas (Dick, 1992; Dunham & Dick, 1994).

A utilização da calculadora gráfica aumenta a diversidade de problemas que podem ser resolvidos pelos alunos pois os cálculos e as funções mais complicadas não funcionam como um obstáculo (Quesada, 1996). A calculadora gráfica pode desta forma ter um grande impacto no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Existem duas grandes mudanças quando se aumenta a utilização das calculadoras gráficas na sala de aula (Demana & Waits, 2000). Uma das mudanças é o envolvimento dos alunos quando trabalham com a calculadora, transformando a aula num laboratório de Matemática. A outra mudança refere-se ao facto de que com as calculadoras gráficas os alunos sentem prazer em trabalhar com a Matemática melhorando a sua relação com a disciplina.

Com a utilização da calculadora gráfica os alunos podem ter outra vantagem no que se refere à possibilidade de produzirem os seus próprios exemplos, formularem as suas hipóteses e verificarem a veracidade das suas conclusões (Dick, 1992). As calculadoras estimulam os alunos a formular e a encontrar resposta para as suas questões. Podem também expressar as suas ideias, formular as suas hipóteses e testá-las, visto que a calculadora permite dar respostas mais rapidamente no desenvolvimento de uma investigação (Dick, 1992). Os alunos de uma forma natural tendem, durante o desenvolvimento do seu trabalho, a reconhecer e a identificar os erros cometidos e a corrigi-los (Gómez, 1996). As calculadoras são assim detentoras de um grande potencial no âmbito de uma aprendizagem centrada no aluno e na sua compreensão dos conceitos.

Para Drijvers e Doorman (1996) existem cinco vantagens relativamente à utilização da calculadora gráfica na sala de aula: o *contexto real,* pois o uso da calculadora gráfica permite que os alunos passem das operações meramente algébricas para operações reais; a *exploração*, visto que o uso da calculadora estimula a formulação de novas questões e a generalização dos problemas criando oportunidades para a exploração; a *integração*, pois o uso da calculadora gráfica estimula a integração de actividades algébricas e geométricas possibilitando aos alunos estabelecer ligações entre vários aspectos da Matemática; a *dinâmica*, visto que o uso da calculadora gráfica é o instrumento ideal para a visualização das alterações dos parâmetros numa expressão e as suas relações estimulando a observação analítica dos modelos; e a *flexibilidade* pois com a utilização da calculadora gráfica existe a procura de soluções flexíveis.

Por outro lado, Doerr e Zangor (2000) consideram que o uso da calculadora gráfica quando projectada num ecrã visível para toda a turma torna-se numa ferramenta "poderosa" que apoia a discussão, a comparação e a unificação das ideias matemáticas. Barron e Hynes (1996) referem que o uso da tecnologia na sala de aula promove o desenvolvimento da comunicação matemática visto que os alunos ficam mais motivados e interessados em realizar investigações e em apresentar as suas conclusões oralmente à turma. A comunicação das ideias matemáticas transforma os alunos em aprendizes matemáticos. Com a utilização das tecnologias em contexto de sala de aula, os alunos podem comunicar com e sobre matemática acabando com o tédio dos cálculos matemáticos repetitivos. Portanto, quando se torna a tecnologia como um instrumento promotor da qualidade da comunicação sobre conceitos, desenvolve-se uma maneira mais autêntica de ensinar matemática (Barron & Hynes, 1996).

Apesar de todos os contributos da utilização da calculadora gráfica, esta transporta consigo algumas exigências e dificuldades. Essas dificuldades, no entanto, devem ser encaradas como um estímulo ao desenvolvimento cognitivo dos alunos. Um estudo desenvolvido por Ruthven (1992) verificou que existe uma discrepância considerável entre os conceitos informais dos alunos e a linguagem formal da calculadora gráfica. Alguns alunos consideraram os procedimentos com a calculadora complexos e lentos. Existe, assim, uma relação complexa entre o pensamento matemático e o uso da calculadora, ou seja, a natureza da calculadora enquanto ferramenta cognitiva. Essencialmente, as operações da calculadora para as manipulações simbólicas reflectem um modelo sofisticado de estrutura algébrica que não pode ser facilmente assimilado para a maioria das concepções informais dos alunos. Na verdade, a utilização da calculadora gráfica na sala de aula de Matemática não proporciona apenas um mecanismo de cálculo e de desenho, mas também um meio para pensar e aprender (Ruthven, 1990a, 1990b, 1992).

Demana et al. (1993) apontam para várias investigações que confirmam que o uso das tecnologias no ensino da Matemática é importante para o desenvolvimento cognitivo dos alunos. O facto é que as calculadoras desempenham um duplo papel na aprendizagem da Matemática, por um lado, são instrumentos que auxiliam os alunos no cálculo em muitos problemas, e por outro lado, ajudam na descoberta e na formação de conceitos (Ponte et al., 1999). Em particular, no estudo das funções, a utilização da calculadora gráfica é um factor importante, na medida em que se desenvolve as estratégias de descoberta e exploração e o espírito crítico do aluno (Teixeira et al., 1998).

Assim, a utilização da calculadora gráfica na aprendizagem pode ajudar os alunos a aprender matemática, pois a aplicação deste artefacto na sala de aula enriquece a extensão e a qualidade das investigações visto proporcionar e favorecer, sob múltiplas perspectivas, um meio de visualização das noções matemáticas e em que os alunos têm mais oportunidades para tomar decisões e maior liberdade para discutir os resultados (Ruthven, 1990a, 1990b; Mamede, 2002; Moura, 2005; NCTM, 2008).

A visualização matemática é um processo de formação de imagens e da sua utilização na descoberta e compreensão de processos e de fórmulas. O facto de os alunos poderem visualizar os conceitos nos diferentes temas matemáticos minimiza a necessidade de abstracção, de imaginação e de concentração que o método tradicional de ensino exige. O interesse da tecnologia gráfica no ensino e aprendizagem da Matemática está na possibilidade de visualização, estabelecendo-se uma conexão entre a álgebra e a correspondente imagem geométrica, permitindo aos alunos a resolução de problemas com maior complexidade (Markovits et al., 1986; Cunningham & Zimmerman, 1991; Embse, 1992; Hector, 1992; Lauten, Graham & Ferrini-Mundy, 1994; Yunker, 1995; Moura, 2005).

O poder da visualização confere aos alunos uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos, visto complementar a aprendizagem simbólica com a imagem visual (Cunningham, 1991). No método tradicional, verificava-se que grande parte dos alunos não conseguia, por exemplo, estabelecer a relação entre a expressão designatória de uma função e o gráfico respectivo. Com a utilização da calculadora gráfica o aluno pode pré visualizar o gráfico da função e posteriormente efectuar o seu estudo (Cunningham, 1991; Domingos, 2008). Assim, com o uso deste instrumento torna-se possível traçar vários gráficos no mesmo referencial, construir tabelas, determinar pontos de intersecção com os eixos coordenados, extremos relativos, intervalos de monotonia, assimptotas e pontos de inflexão (Embse, 1992; Hector, 1992; Teixeira et al., 1998). Com, efeito, as calculadoras gráficas são poderosas ferramentas de cálculo e com boas possibilidades gráficas permitindo visualizar em simultâneo a expressão analítica da função e o gráfico respectivo sendo desta forma possível detectar erros na tradução dos dados (Domingues, 1999).

No entanto, no estudo das funções, a selecção de uma janela visualização adequada continua a ser uma das grandes dificuldades dos alunos, na utilização da calculadora gráfica pois, a interpretação incorrecta de um gráfico pode resultar de efeitos visuais ilusórios (Rocha, 2000, 2001; Moura, 2005). Assim, a má utilização da calculadora gráfica pode induzir os alunos em erros. Portanto, é importante que os alunos tenham a oportunidade de estudar o efeito que a alteração e ajustamento da janela de visualização podem ocorrer na representação gráfica de uma função (Rocha, 2000, 2001).

As dificuldades que os alunos manifestam no manuseamento da calculadora gráfica devem-se, a maior parte das vezes à pouca importância que revelam na descoberta das várias potencialidades da calculadora gráfica pois, por vezes, limitam-se apenas a repetir os processos que foram trabalhados nas aulas (Rocha, 2000, 2001). Cada vez mais se torna importante que os alunos aprendam a utilizar as calculadoras conscientes da necessidade de um conhecimento pormenorizado do seu funcionamento. Para além da tomada de consciência por parte do aluno da importância do conhecimento das potencialidades da calculadora gráfica é necessário que desenvolva a capacidade de interpretar de forma crítica e adequada a informação disponibilizada.

Muitas são as investigações que comprovam a mudança de atitude dos alunos que utilizam a calculadora gráfica na aprendizagem da Matemática, pelo facto de se tornar mais acessível novas formas de abordar os problemas e encorajar a experimentar e a investigar (Groves, 1994; Penglase & Arnold, 1996; Quesada, 1996). Em particular, num estudo desenvolvido por Cardoso (1995), numa turma do 12.º ano, desmotivada e com muitas dificuldades, a calculadora gráfica revelou-se um instrumento importante e crucial na motivação dos alunos, essencialmente devido às suas capacidades gráficas.

3.4. A calculadora gráfica na sala de aula

A introdução da calculadora gráfica na escola não teve apenas como objectivo o de ser uma mera ferramenta à disposição de todos os alunos para lhes facilitar o trabalho desenvolvido, mas, sobretudo, para proporcionar a possibilidade de resolverem problemas que desenvolvam a capacidade de investigar (Ponte et al., 1999). No entanto, a calculadora gráfica precisa de ser utilizada de forma adequada, de maneira a que sejam aproveitadas todas as suas potencialidades e que os alunos aumentem a sua autonomia e espírito crítico na resolução de problemas e na descoberta de conceitos matemáticos (Quesada, 1996). Aos alunos deve ser dada a oportunidade de explorar e conjecturar, de investigar situações, de experimentar as soluções e de descobrir relações matemáticas. Caso as calculadoras sejam utilizadas no máximo do seu potencial torna-se praticamente impossível estabelecer uma comparação entre o ensino com a calculadora e o ensino tradicional (Bright & Williams, 1995).

Se os alunos forem incentivados a explorar, experimentar, visualizar e relacionar, ou seja, motivados a desenvolver uma atitude investigativa face as tarefas propostas então o ensino pode ser promotor de uma aprendizagem por descoberta (Cardoso, 1995; Rocha, 2008). Para que seja feita uma utilização inteligente da calculadora gráfica cabe ao professor uma responsabilidade acrescida no que se relaciona com a planificação de tarefas que sejam adequadas ao seu uso e cabe ao aluno a capacidade de decisão em relação à adequação da utilização da calculadora na resolução das tarefas propostas pelo professor (Burril, Allison, Breaux, Kastberg, Leatham & Sanchez, 2002; Fernandes, 2008).

O modo como o aluno utiliza a calculadora gráfica permite ao professor conhecer muito da forma como raciocina e da percepção que tem dos conceitos envolvidos (Rocha, 2000). O tipo de utilização da calculadora gráfica, segundo Rocha (2000) pode ser efectuado de três formas diferentes: *como um laboratório* quando existe o recurso à tecnologia com intuito exploratório de forma a conhecer melhor determinada situação; *como uma tábua de salvação*, quando existe o recurso à tecnologia com o intuito serem ultrapassadas dificuldades na resolução de questões concretas; e *como um avião a jacto*, quando existe o recurso à tecnologia devido à rapidez na execução de determinadas tarefas. Assim, a relação entre o aluno e a calculadora gráfica pode de algum modo influenciar a forma como utiliza este instrumento, assim como o papel que lhe atribui quando resolve as diferentes tarefas proposta.

Com o aparecimento da calculadora gráfica surgiu um novo desafio no ensino da Matemática, pois esta ferramenta alterou a natureza dos seus problemas e os métodos usados na sua investigação. As calculadoras vieram proporcionar um novo tipo de tarefas, questões e estratégias de ensino e aprendizagem a desenvolver dentro da sala de aula (Burrill, 1992; Hembree & Dessart, 1992; Dunham & Dick, 1994; Burril et al., 2002).

Para Doerr e Zangor (2000) existem cinco padrões e modos de usar a calculadora gráfica pelos alunos. Consideram que a calculadora pode assumir diferentes modos, tais como: *ferramenta computacional* quando a calculadora é utilizada para avaliar expressões numéricas, estimativas e arredondamentos; *ferramenta transformacional* quando a calculadora é utilizada para mudar a natureza da tarefa (passagem de uma tarefa de natureza computacional para uma tarefa de natureza interpretativa); *ferramenta de recolha e análise de dados* quando a calculadora é utilizada para recolher e armazenar dados, estudar fenómenos a que estes dizem respeito e procurar modelos adequados; *ferramenta de visualização* quando a calculadora é utilizada no desenvolvimento de parâmetros coincidentes com estratégias que permitem encontrar equações que se ajustem a conjuntos de dados, para encontrar visualizações apropriadas de um gráfico e determinar a natureza implícita da estrutura da função, para ligar uma representação visual a um fenómeno físico, para efectuar a leitura de funções simbólicas, para representar e interpretar dados e para resolver equações; e *ferramenta de verificação* quando a calculadora é utilizada para confirmar conjecturas e compreender formas simbólicas múltiplas. Isto sugere que a calculadora gráfica é uma rica ferramenta multifuncional e que, no estudo continuado da sua utilização prática na sala de aula, é importante delinear cuidadosamente os padrões e modos de utilização que ocorrem de acordo com cada contexto.

Segundo alguns autores, os alunos normalmente utilizam a calculadora gráfica como instrumento de confirmação dos resultados obtidos analiticamente (Penglase & Arnold, 1996; Waits & Demana, 2000; Rocha, 2000). Este facto resulta dos alunos considerarem que este instrumento tecnológico os pode ajudar quando não conseguem resolver a tarefa proposta utilizando apenas papel e lápis (Rocha, 2000).

Jones (1995) considera que as calculadoras gráficas são uma ferramenta com um grande potencial na melhoria do ensino e da aprendizagem do cálculo. Procura entender, como é que uma tecnologia inteligente tal como a calculadora gráfica poderá exercer influência no desempenho dos alunos a Matemática e considera que tem de se ter em conta dois tipos de efeitos na utilização dessa tecnologia: os efeitos com a tecnologia e os efeitos da tecnologia. Os *efeitos com a tecnologia* dizem respeito às alterações de desempenho que ocorrem quando os alunos estão a utilizar a calculadora gráfica. Por outro lado, os *efeitos da tecnologia* estão relacionados com as alterações de desempenho que podem ocorrer como resultado da participação dos alunos numa actividade matemática com a utilização da calculadora gráfica mas que permanecem quando os alunos estão envolvidos em actividades matemáticas que não envolvem a calculadora.

As calculadoras gráficas desempenham assim, um papel fundamental na realização matemática dos alunos (Alexander, 1995). Os alunos tornam-se participantes activos no processo de aprendizagem pois usam a calculadora gráfica como uma ferramenta para a exploração da Matemática.

Ponte et al. (1997) consideram que trabalhar com a calculadora gráfica na resolução de tarefas que desafiem e estimulem os alunos a formular conjecturas promove a capacidade de investigar e de desenvolver raciocínios e argumentos. A calculadora gráfica enriquece a qualidade e a extensão das investigações na aula de Matemática, pois desta forma os alunos podem analisar exemplos e contra-exemplos, explorar e formular conjecturas mais rapidamente. A calculadora gráfica constitui assim, um importante instrumento tecnológico que ajuda os alunos a aprender matemática (Mamede, 2002; Moura, 2005).

3.5. A calculadora gráfica e o ensino das funções

Como os alunos só a partir do ensino secundário é que começam a fazer experiências com gráficos de funções não lineares, é de esperar que seja necessário disponibilizar tempo suficiente para que investiguem e explorem os efeitos das escalas e das conexões entre as representações numéricas, algébricas e gráficas de uma aplicação ou de um conceito. Rich (1990) sustenta que os alunos que usam a calculadora gráfica durante todo o ano estão mais habilitados em lidar com as alterações de escalas nos gráficos do que os alunos do ensino tradicional. Defende também que os alunos que usam a calculadora gráfica com regularidade entendem melhor as conexões entre as representações algébricas e os seus gráficos; visualizam os gráficos de uma forma mais global; entendem a importância do domínio de uma função, os intervalos de crescimento e de decrescimento; o seu comportamento assimptótico e o seu comportamento final. Assim, a calculadora gráfica é uma tecnologia que ajuda os alunos a melhorarem o seu conhecimento cognitivo.

O NCTM (1991) recomenda que a *álgebra* deve ser ensinada como o estudo das relações entre as quantidades. Dentro desta concepção, o currículo de álgebra deve ajudar os alunos a ser capazes de realizar representações de funções, a estabelecer relações de várias maneiras, a usar as representações para modelar situações-problema e a resolver problemas.

Alguns estudos têm chamado a atenção para o facto de se verificar que para certos alunos as fórmulas algébricas são nada mais do que meras sequências de símbolos e em determinados procedimentos são rotineiramente aplicados (Sfard & Linchevski, 1994). Para estes alunos, as manipulações formais são a única forma a partir da qual as construções simbólicas podem ter significado. Sfard e Linchevski (1994) enfatizam a importância dos alunos desenvolverem a versatilidade e adaptabilidade do seu pensamento. As investigadoras consideram fundamental que os alunos adquiram uma atitude activa no sentido de saberem distinguir o que é aceitável temporariamente daquilo que dá origem a uma perspectiva definitiva (Sfard & Linchevski, 1994). Torna-se, assim, importante que os alunos adquiram formas activas de interpretar situações, interpretar as suas acções, pensar no significado dos símbolos e das operações.

Segue-se uma apresentação do conceito de função, das suas representações e por fim do seu estudo com recurso à calculadora gráfica.

3.5.1. O conceito de função

O conceito de função é considerado como um dos conceitos mais importantes em toda a Matemática e quando se pretende encontrar a sua origem é necessário recuar 4000 anos. Na pré-história, o homem primitivo estabelecia uma correspondência funcional entre duas entidades quando fazia corresponder a um conjunto de pedras ou pedaços de osso o número de animais no seu rebanho (Domingos, 2008). Desde as épocas antigas que casos particulares de funções podem ser encontrados, por exemplo, na correspondência entre um determinado conjunto de objectos e uma sequência de contagem de números; nas quatro operações aritméticas elementares em que, cada uma, é uma função de duas variáveis e nas tabelas dos babilónios dos quadrados, das raízes quadradas, dos cúbicos, das raízes cúbicas e dos recíprocos.

Anos mais tarde, no inicio do século XVIII, o matemático João Bernoulli, definiu função duma grandeza variável como uma quantidade composta dessa grandeza variável e de constantes (Caraça, 1951). Para esse matemático o conceito de função reduzia-se à sua expressão analítica, tendo-se mantido esta ideia ao longo de muitos anos e até à actualidade. No final do século XIX, na definição de Riemann-Dirichelet, surge a noção de correspondência entre as duas variáveis, que é sem dúvida considerada como uma das ideias basilares da matemática (Caraça, 1951). Assim, ao longo das várias épocas o conceito de função teve diferentes representações, passando inicialmente de uma abordagem geométrica para uma abordagem algébrica a qual pressupõem a existência de uma expressão analítica (Domingos, 2008; Hitt, 1998).

Segundo Caraça (1951), na matemática o conceito de função aparece como o instrumento próprio para o estudo das leis quantitativas que permite estabelecer a conexão entre a matemática e as ciências da natureza. Este conceito de função é um dos mais importantes pois constitui uma boa ferramenta na representação e interpretação de situações de vida real e da própria matemática, em que se possam estabelecer correspondências entre duas variáveis. Assim, uma função é uma relação em que dois conjuntos, ligados por uma regra, em que a cada elemento do primeiro conjunto corresponde exactamente um e um só elemento de um segundo conjunto (Greenes & Findell, 1999).

No entanto, é importante não confundir o conceito de função com o de expressão analítica, que designa unicamente uma forma de estabelecer correspondência entre as variáveis. O conceito de função permite também estabelecer correspondências entre as leis matemáticas e as leis geométricas, ou seja, entre as expressões analíticas e os lugares geométricos pois cada função pode ser representada pela sua expressão analítica e pela sua representação geométrica, denominado gráfico da função (Caraça, 1951). Actualmente, uma função pode ser representada de várias maneiras, nomeadamente pela sua fórmula algébrica, por uma tabela de valores ou por um gráfico (Domingos, 2008).

Relativamente ao conceito de função, existem várias concepções, que segundo Kaldrimidou e Ikonomou (1998), dependem do contexto em que se aplicam. Por exemplo, uma função pode ser considerada como uma relação, como uma transformação ou como um objecto. Estas concepções são diferentes do ponto de vista epistemológico, porque o significado do conceito é diferente em cada situação. Assim, as representações e os processos utilizados em cada situação são também diferentes. Dessa forma, estes investigadores sugerem que estes procedimentos constituam o cerne do conceito de função pois desempenham um papel importante na construção deste conceito.

Slavit (1997) desenvolveu um trabalho em que pretendeu apresentar uma perspectiva alternativa para a utilização de um quadro da acção/processo/objecto quando os alunos discutem o desenvolvimento das suas teorias ou das suas concepções sobre função. Analisou os diferentes entendimentos e abordagens dos alunos sobre o conceito de função referindo que a maior parte das teorias que os alunos desenvolvem sobre o conceito de função referem-se às diferenças entre as concepções sobre a "acção-orientada" e as concepções entre o "objecto-orientado" (p.261). Assim, inicialmente os alunos adquirem uma acção ou visão operacional de função (Briedenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992). Num contexto de uma teoria de acção/processo/objecto de um desenvolvimento conceptual, uma visão de acção envolve uma compreensão de função como uma construção "não permanente" (Briedenbach et al., 1992, p.261). Os alunos podem ampliar a sua compreensão de "acção-orientada" (Briedenbach et al., 1992, p.261) de forma a torná-la mais permanente, noção de "objecto-orientado" dentro dos seus conceitos de função (Vinner, 1983). Uma discussão de visão de "objecto-orientado" de função começou a ser severamente reexaminada pelas teorias existentes. Uma teoria alternativa para uma visão de "objecto-orientado" da função foi apresentada por Slavit (1997), em que se discute o desenvolvimento do aluno num contexto diferente. Os dados da investigação ilustram que uma perspectiva de propriedade orientada é só uma visão de função que os alunos podem desenvolver de acordo com certas circunstâncias e formas de instrução (Slavit, 1997).

Para Sajka (2003), "a função é um dos conceitos básicos de Matemática, surpreendente na diversidade das suas interpretações e representações" (p.229). Apesar de no processo didáctico ser dedicado muito tempo e atenção, a função continua a ser um conceito difícil e os alunos continuam a enfrentar muitos obstáculos ao tentarem entender as funções.

Na verdade, a noção de função pode ser entendida de duas formas fundamentalmente diferentes: *estruturalmente* como um objecto e *operacionalmente* como um processo (Sfard, 1991). Para Sfard (1991), função pode ser definida não apenas estruturalmente como um conjunto de pares ordenados, mas também operacionalmente como um determinado processo computacional ou como um método bem definido para a obtenção de um sistema para outro. Estas duas abordagens, embora aparentemente incompatíveis, são na verdade complementares. Sfard (1991) mostrou que os processos de aprendizagem e de resolução de problemas consistem numa interacção complexa entre as concepções operacional e estrutural das mesmas noções. Por razões de exemplos históricos e face à teoria cognitiva, Sfard (1991) conjecturou que a concepção operacional é, para a maioria dos alunos, o primeiro passo na aquisição de novas noções matemáticas.

A análise aprofundada das etapas de formação de conceito dá origem à conclusão de que a transição de operações computacionais para objectos abstractos é um longo e difícil processo realizado em três etapas: interiorização, condensação e reificação. Na fase de *interiorização*, um aluno familiariza-se com os processos que acabarão por dar origem a outro conceito, como por exemplo nas manipulações algébricas que se transformam numa função. Estes processos são realizados em operações de baixo nível matemático. No entanto, aos poucos o aluno torna-se qualificado para realizar esses processos. No caso da função, acontece "quando a ideia de variável é aprendida e a habilidade de usar uma fórmula para calcular os valores da variável dependente é adquirida" (Sfard, 1991, p.19). A fase de *condensação* é uma fase em que as longas sequências de operações se restringem a unidades mais fáceis de administrar. Nesta fase, o aluno torna-se mais capaz de pensar sobre um determinado processo como um todo, sem sentir necessidade de entrar em detalhes. A fase de condensação dura tanto quanto uma nova entidade permanece firmemente ligada a um determinado processo. Só quando um aluno se torna capaz de conceber a noção objecto diz-se que o conceito foi reificado. A *reificação*, por definição é uma mudança ontológica, ou seja, uma súbita capacidade de ver algo familiar de uma forma totalmente nova. Assim, enquanto a interiorização e condensação são graduais a reificação é um salto quântico instantâneo, ou seja, um processo de solidifica-se num objecto numa estrutura estática.

3.5.2. Dificuldades nas diferentes representações de uma função

Estudos existentes apontam para preocupações no que concerne ao problema das funções poderem ser representadas de diferentes formas (algébrica ou simbólica, numérica ou em tabela e gráfica) e as dificuldades que os alunos têm de estabelecer conexões entre elas. Kaldrimidou e Ikonomou (1998) consideram que cada forma de representação destaca alguns aspectos de uma função e fornece informações sobre outros aspectos da função que pode ser assim determinada. Mas, cada uma das representações de uma função não pode explicitamente descrever o problema na sua totalidade. Em vez disso, elas se complementam e cada uma é uma forma de representar um ou outro aspecto da função. Isto torna-se evidente quando se considera a terminologia relativa às funções, ou seja, a fórmula da função, sua representação gráfica ou os valores da tabela da função (Kaldrimidou & Ikonomou, 1998).

A representação gráfica de uma função é apenas uma forma de representar a função e não é o seu símbolo. Sendo um gráfico uma representação esquemática, surgem muitas dificuldades decorrentes das características específicas da língua de uma representação esquemática, ou seja, dificuldades de natureza cognitiva. Os alunos evitam processos gráficos quando enfrentam problemas envolvendo funções. Kaldrimidou e Ikonomou (1998) verificaram que as dificuldades observadas na utilização e interpretação de gráficos não se devem tanto a factores relacionados com a linguagem dos gráficos (código), mas com a importância dada a este código no contexto da aula. Relacionam essas dificuldades com: (i) características gerais epistemológicas (o valor matemático da representação gráfica e do procedimento algébrico); (ii) especificidades epistemológicas (geométricas e ponto por ponto a concepção de uma curva versus a relação funcional que representa); e (iii) características metacognitivas (a simplicidade e a eficácia de procedimentos diversos).

No entanto, Zimmermann (1991) considera que o aluno deve ser capaz de representar e interpretar os dados graficamente. Salienta ainda que é importante que os alunos desenvolvam a capacidade de compreender como é que os conceitos fundamentais são representados graficamente, para desenhar e utilizar diagramas e esquemas como ajuda na resolução de problemas e para utilizar os diagramas de forma eficaz nas provas. As imagens gráficas servem como um elo importante entre os modelos matemáticos e os fenómenos do mundo real. A capacidade de interpretar graficamente os processos físicos simples é um aspecto importante do pensamento visual. Assim, o aluno deve ser capaz de interpretar gráficos e outros diagramas que descrevam os processos físicos e de esboçar gráficos de funções associados a fenómenos familiares simples.

Num estudo desenvolvido por Markovits et al. (1986) foi observado que os alunos revelam ter dificuldades em traduzir as representações gráficas de funções para a forma algébrica. Leinhardt et al. (1990) ao desenvolverem investigações sobre funções e gráficos verificaram que os conhecimentos que os alunos vão adquirindo ficam compartimentados e estanques, ou seja, demonstram ter dificuldades em estabelecer relações entre as informações de diferentes representações.

Com o desenvolvimento das tecnologias, em particular, com a evolução das calculadoras gráficas, o estudo das funções pode ser muito diferente. Este instrumento devidamente aplicado na sala de aula, pode desempenhar um papel importante ao ajudar os alunos a compreender mais profundamente a estabelecerem conexões entre as diferentes representações de uma função. A calculadora gráfica pode proporcionar assim, aos alunos a resolução de problemas de nível mais elevados e com ligação à geometria, à álgebra, à estatística e a situações reais com correspondência a modelos matemáticos (Ponte, 1992).

Quando se pretende tirar conclusões na sobreposição de gráficos de funções, a calculadora gráfica permite fazer um estudo pormenorizado da influência dos parâmetros de uma família de funções relacionadas. Assim, a tecnologia pode ser usada para efectuar manipulações ou para obter soluções relativas à modelação matemática criando mais espaço para aspectos particularmente importantes na aprendizagem, nomeadamente para: a formulação de problemas, a elaboração de estratégias adequadas, a compreensão de significados e de conceitos, a análise crítica e o debate mais aprofundado (Ponte, 1992).

3.5.3. As funções e a calculadora gráfica: alguns estudos

Gracias e Borba (2000) elaboraram uma proposta didáctica e pedagógica para o estudo das funções quadráticas com a utilização da calculadora gráfica. Esta proposta consistiu na elaboração de uma sequência de actividade que envolviam o estudo das funções quadráticas no que se refere à compreensão da relação que pode ser estabelecida entre os coeficientes de uma função quadrática e o seu gráfico. Neste trabalho o foco foi predominantemente visual e "empírico". Estes investigadores concluíram que a calculadora gráfica desempenha um papel preponderante no que se refere à visualização, ajudando os alunos no desenvolvimento das suas investigações.

Em particular, no 11.º ano no que se refere ao estudo das famílias de funções o aluno pode experimentar e tentar descobrir propriedades relativamente ao efeito da alteração dos parâmetros no gráfico das funções. Para tal, o aluno deverá fazer registos cuidadosos, de forma a encontrar justificações para o que está a ser observado, assim como, em relacionar a cada momento da experiência, a representação gráfica com a expressão analítica das funções que estão a ser estudadas.

O facto é que, hoje em dia, ainda se verifica por parte dos alunos uma grande dificuldade na interpretação do gráfico de uma dada função pois as tarefas que são propostas dificilmente desenvolvem nos alunos a capacidade de reflectir sobre os resultados obtidos (Rocha, 2001). Na grande maioria dos casos as tarefas que recorrem à utilização da calculadora gráfica são de carácter fechado e mesmo assim os alunos têm muita dificuldade em resolvê-las e, principalmente, em interpretá-las. Rocha (2001) refere que quando os alunos se deparam por exemplo, com uma imagem incompleta de um gráfico de uma função, têm dificuldade em enquadrar o resultado obtido com os conhecimentos matemáticos adquiridos, não conseguindo descobrir a parte do gráfico que não é possível observar no ecrã da máquina. Quando é necessário ajustar a janela de visualização para que seja possível obter a imagem correspondente ao gráfico completo, os alunos não o fazem ou têm dificuldade. Por vezes, tais dificuldades persistem porque o professor não desenvolve com os alunos tarefas em que é dado tempo para pensar, interpretar e reflectir sobre os resultados obtidos na máquina. Quando os alunos representam o gráfico de uma função numa folha de papel têm dificuldade em registar e em compreender quais são os dados importantes a serem considerados. Rocha (2001) refere que quando o aluno ignora a escala a ser considerada na representação de um determinado gráfico não é possível esperar que ele faça interpretações correctas da informação veiculada no gráfico. Um outro problema comum é, por vezes, o aluno aceitar como gráfico de uma função, uma recta quando o resultado que se pretende é uma curva, como é o caso das funções polinomiais de grau superior ao primeiro.

Aos alunos devem ser propostas tarefas diversificadas, ou seja, para além de tarefas de investigação em que é, por exemplo, realizado o estudo das famílias de funções podem ser propostas outras investigações, assim como actividades de modelação e de resolução de situações problemáticas (Matos, 1995; Rocha, 2001). Desta forma, o aluno ao ser incentivado a experimentar, conjecturar, intuir, testar os resultados obtidos está a desenvolver o pensamento científico (Pires, 2002).

Ruthven (1990a, 1990b) desenvolveu um estudo de forma a poder comparar o desempenho matemático de alunos do ensino secundário de matemática para quem uma calculadora gráfica é uma ferramenta padrão com o de alunos sem acesso regular à representação gráfica da tecnologia. Os estudantes foram testados em dois tipos de itens: de *simbolização*, que apelavam para uma descrição algébrica de um determinado gráfico cartesiano e de *interpretação*, que apelavam para a extracção de informações verbalmente contextualizadas relativas a um determinado gráfico. Os resultados demonstram que em condições adequadas, o acesso à tecnologia da informação pode ter uma influência importante, quer sobre abordagens matemáticas usadas pelos alunos quer sobre a sua realização matemática. Assim, a calculadora gráfica permite que os alunos executem rapidamente o gráfico de uma função, isolem uma secção do gráfico, aumentem o *zoom* para obter mais detalhes da função, diminuam o *zoom* para visualizar a função quando x aumenta ou diminui e comparem o gráfico de uma função com o gráfico de outra função (Hector, 1992). Os alunos quando usam a calculadora gráfica podem fazer o gráfico de famílias de funções e descobrir conexões entre as representações algébricas e gráficas das funções, podem observar e generalizar a partir dos gráficos que produzem. Os alunos, individualmente ou em pequenos grupos podem ser convidados a fazer o gráfico, a observar, a discutir e a anotar as observações. Posteriormente, as observações podem ser partilhadas com o grupo turma e as conclusões refinadas (Hector, 1992).

Aos alunos, quando usam a calculadora gráfica, deve ser pedido para interpretarem os resultados com cuidado sendo particularmente importante o cuidado que se deve ter com a escala e com o que muda e o que permanece igual quando a escala é alterada (Hector, 1992). Com a utilização da calculadora gráfica é possível fazer um estudo mais pormenorizado das classes de funções. A observação, na calculadora gráfica, de várias representações gráficas de funções da mesma classe possibilita aos alunos conjecturar sobre as suas propriedades, ficando assim mais convictos da plausibilidade das suas conjecturas (Fernandes, 1998).

Rich (1991) verificou com os seus alunos que a utilização da calculadora gráfica auxiliou a compreensão do conceito de gráfico de uma função. Os alunos ao trabalharem com este artefacto verificaram que os problemas algébricos podem-se resolver tanto ao nível gráfico como por manipulação algébrica e melhoraram a sua compreensão da relação entre a equação algébrica e o respectivo gráfico. A mesma preocupação encontra-se no trabalho desenvolvido por Giamati (1990) que realizou um estudo sobre as calculadoras gráficas e o pré-cálculo em que um dos focos era o estudo dos alongamentos, das translações, das reflexões e o das funções inversas. O papel desempenhado pela calculadora gráfica era o de permitir que os alunos observassem e analisassem os efeitos da mudança de parâmetros nos gráficos das funções e as suas relações. Os resultados deste estudo mostraram que o grupo experimental obteve um melhor aproveitamento nos alongamentos, nas translações e nas descrições das variações dos parâmetros. A construção de tabelas de pares funcionais de números foi um factor fundamental para os alunos estabelecerem as relações conceptuais entre os gráficos e as respectivas equações. Refere também que os alunos que mantiveram apenas um breve contacto com a calculadora gráfica tiveram mais dificuldades em se adaptarem a esta ferramenta (Giamati, 1990).

A calculadora gráfica pode assim, ser usada pelos alunos como um meio rápido e eficiente de gerar exemplos e consequentemente, os alunos podem concentrar-se mais na matemática dos problemas e não apenas na manipulação algébrica (Cavanagh & Mitchelmore, 2003).

Parte II.

Parte Empírica

CAPÍTULO 4

Metodologia

Neste capítulo são apresentadas e justificadas as opções metodológicas consideradas nesta investigação, referidos os vários processos utilizados na sua realização e apresentadas as tarefas de investigação e a respectiva planificação. Com efeito, é feita a explicação de como foram seleccionados os participantes, são referidas as técnicas utilizadas na recolha de dados e a forma como estes dados foram analisados. Na parte final deste capítulo são também apresentadas cada uma das tarefas de investigação implementadas neste estudo e a forma como foram planificadas pela professora investigadora.

4.1. Opções metodológicas

É importante entender como é que os alunos pensam e quais as suas dificuldades (Ponte, 2002). A actividade investigativa tem de ser uma actividade questionante, inquiridora e fundamentada. Investigar sobre a própria prática visa, em primeiro lugar alterar a nossa prática em algum aspecto e tentar entender que tipos de problemas afectam essa prática e o que fazer e como fazer para a melhorar (Ponte, 2002).

Com a presente experiência a professora investigadora pretende contribuir para o desenvolvimento da capacidade de argumentar em Matemática dos alunos da turma em estudo, quando exploram tarefas de investigação com a utilização da calculadora gráfica. Pretende-se, assim, saber de que forma a realização de um conjunto de tarefas realizadas em grupo pode contribuir para o desenvolvimento da capacidade de argumentar dos alunos em Matemática e como é que a utilização da calculadora gráfica influencia a concretização dessas tarefas.

Assim, tendo em conta o objectivo principal desta investigação e o facto de se realizar numa turma durante a aula de Matemática, ou seja, no ambiente natural dos alunos, a professora investigadora optou por efectuar um estudo de carácter qualitativo e essencialmente descritivo e interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). Pois, quando se pretende efectuar uma investigação de carácter qualitativo, as questões propostas para serem investigadas são estabelecidas de acordo com o fenómeno que se pretende estudar no seu contexto natural e em toda a sua complexidade (Bodgan & Biklen, 1994). Assim, as questões não são construídas por operacionalização de variáveis, ou seja, não são formuladas hipóteses que se pretendam testar mas sim questões que têm como objectivo orientar o estudo.

A opção por uma metodologia qualitativa deveu-se ao facto do presente estudo apresentar as características enunciadas por Bogdan e Biklen (1994): (i) o ambiente natural é a fonte directa dos dados e o investigador é o instrumento principal na sua recolha; (ii) a recolha de dados é essencialmente descritiva; (iii) ao investigador interessa mais o processo do que o produto; (iv) os dados são analisados de forma indutiva; e (v) a perspectiva dos participantes é extremamente valorizada.

Devido ao objectivo do presente estudo e dentro de uma metodologia qualitativa, optou-se pelo estudo de caso que, segundo Yin (1984), é um modelo de investigação que se aplica em casos em que o fenómeno em estudo não pode ser dissociado do seu contexto. O estudo de caso trata-se de uma abordagem metodológica de investigação especialmente adequada quando procuramos compreender, explorar ou descrever acontecimentos e contextos complexos, nos quais estão simultaneamente envolvidos diversos factores. Yin (1984) afirma que esta abordagem se adapta à investigação em educação, quando se é confrontado com situações complexas, de tal forma que dificulta a identificação das variáveis consideradas importantes, se procura respostas para o "como?" e o "porquê?", se procura encontrar interacções entre factores relevantes próprios dessa entidade, se o objectivo é descrever ou analisar o fenómeno, a que se acede directamente, de uma forma profunda e global ou se pretende apreender a dinâmica do fenómeno, do programa ou do processo.

Para Ponte (2006) o estudo de caso trata-se de uma investigação de um caso particular, ou seja, de uma situação com uma certa especificidade, procurando descobrir o que detêm de mais característico e essencial, para assim contribuir para uma melhor compreensão de um determinado fenómeno de interesse. Assim, o objectivo de um estudo de caso é descrever e analisar (Ponte, 2006).

No entanto, existem algumas limitações quando o investigador opta por um estudo de caso de carácter qualitativo, nomeadamente a sua validade externa devida à impossibilidade de se proceder a uma generalização a partir de um caso. Como o estudo de caso incide sobre um único caso, por vezes, estes estudos são muitas vezes criticados pois não permitem a generalização dos seus resultados e conclusões (Ponte, 1994). Este investigador considera também que um dos problemas resulta da grande complexidade inerente às situações educativas, conjuntamente com o facto de serem vivenciadas por seres humanos com intenções e significados diferenciados. Portanto, é importante que com estes estudos não se tenha como objectivo primordial encontrar soluções para situações problemáticas vivenciadas no ensino e na aprendizagem, mas que se pretenda apenas acrescentar novos elementos que ajudem a enriquecer o conhecimento colectivo de uma comunidade matemática acerca desses mesmos problemas (Ponte, 1994).

Relativamente às críticas colocadas ao estudo de caso, Yin (1989) considera que apesar de não poderem ser generalizáveis para um determinado universo podem, no entanto ajudar no surgimento de teorias novas ou na confirmação de teorias já existentes. Assim, o estudo de caso não tem como objectivo a generalização dos resultados obtidos, mas o de melhorar a compreensão de um caso particular (Ponte, 1994; Yin, 1989).

A presente investigação enquadra-se, assim, num paradigma interpretativo e baseia-se num estudo de caso implementado numa turma do ensino secundário em que a professora investigadora lecciona a disciplina de Matemática A. Assim, o foco principal da investigação são os alunos e, com este estudo, a professora pretendeu contribuir para o desenvolvimento da capacidade de argumentarem em Matemática, bem como para uma melhor utilização da calculadora gráfica.

Foram observadas situações de aula em que as tarefas propostas tinham como intuito a utilização da calculadora gráfica. Com este trabalho, a professora investigadora pretendeu estudar o tema das funções, em particular as racionais, que designam todas as funções cuja expressão analítica se reduz ao quociente entre dois polinómios inteiros em x, ou seja, $R(x) = P(x) / Q(x)$.

A selecção do tema a investigar deveu-se especialmente ao facto de ser um dos itens do programa em que é fundamental os alunos saberem utilizar a calculadora gráfica de forma a tirarem o máximo partido das suas potencialidades.

4.2. Os participantes no estudo

A professora investigadora desenvolveu a investigação numa turma do 11.º ano do ensino secundário na disciplina de Matemática A em que desempenhava simultaneamente o cargo de professora da disciplina e de Directora de Turma. De seguida, é feita uma breve apresentação da escola e do meio envolvente, bem como da turma que participou no estudo, das razões da sua selecção e dos grupos de trabalho.

4.2.1. A escola

A Escola onde decorreu o presente estudo é um estabelecimento de ensino público situado numa cidade de um concelho do litoral da região do Minho a norte do rio Cávado. Este estabelecimento de ensino está localizado numa zona económica e socialmente heterogénea. Relativamente a dados recolhidos no ano de 2009, a maioria dos encarregados de educação têm como habilitações académicas o 2.º Ciclo (71,9%), sendo significativa a percentagem de encarregados de educação apenas com o 1.ºCiclo (37%). Regista-se, contudo, uma percentagem significativa (19,9%) de encarregados de educação com licenciatura.

Para a realização do presente estudo, no inicio do ano lectivo de 2009/10, a professora investigadora solicitou autorização ao Director da Escola para poder desenvolver uma experiência numa das suas turmas do 11.º ano, tendo esta sido concedida e para a qual foram disponibilizados todos os meios necessários (Anexo 1).

4.2.2. A turma

Como o intuito da presente investigação é estudar o desenvolvimento da argumentação matemática na resolução de tarefas de investigação com a utilização da calculadora gráfica, toda a turma foi seleccionada para ser efectuado o presente estudo, enquanto elementos pertencentes a um pequeno grupo ou ao grupo turma.

O estudo realizou-se durante o ano lectivo de 2009/10, numa turma do 11.º ano do Curso Científico-humanístico de Ciências e Tecnologias. Uma das razões para a selecção da turma é o facto de ser um caso de continuidade pedagógica iniciada no 10.º ano em que os alunos sempre se mostraram interessados e motivados pela disciplina de Matemática, apesar de algumas dificuldades manifestadas. Para além disso, todos os alunos da turma, desde o inicio do 10.º ano foram incentivados e estimulados pela professora a realizar trabalhos de investigação matemática, quer individualmente quer em grupo, com o objectivo de desenvolver a comunicação, a argumentação e o raciocínio matemático.

A turma era constituída por vinte e cinco alunos, dos quais sete eram rapazes e dezoito eram raparigas, e em que a média das idades era de aproximadamente de 15,9, variando entre os 15 e os 17 anos. Dos vinte e cinco alunos da turma, dois eram repetentes inscritos apenas à disciplina de Matemática A e uma de nacionalidade Moldava. Relativamente às habilitações literárias dos pais dos alunos desta turma, 40% têm o segundo ciclo, seguindo-se 28% com o terceiro ciclo completo. No que concerne às habilitações literárias das mães, regista-se algo análogo, pois a maior parte tem o segundo ciclo (44%) seguindo-se o terceiro ciclo completo (25%). É de salientar que uma pequena minoria dos pais tem o ensino superior.

No ano lectivo de 2008/09 nenhum aluno terminou o 10.º ano com classificação negativa à disciplina de Matemática. No final do 11.º ano todos os alunos obtiveram novamente classificações positivas. No entanto, constata-se que as classificações com maior frequência absoluta no 10.º ano foram doze e treze valores, enquanto no 11.º foram dez e onze valores. Verifica-se também que os alunos da turma têm classificações à disciplina de Matemática bastante heterogéneas (Tabela 2).

Tabela 2. Avaliação à disciplina de Matemática

Avaliação à disciplina de matemática	10.º Ano	11.º Ano
[10,12[	5	11
[12,14[	10	3
[14,16[	3	3
[16,18[	6	4
[18,20]	1	4

Para a realização deste estudo é importante referir que a professora investigadora antes de iniciar o presente estudo, enviou um pedido formal a todos os Encarregados de Educação dos alunos para ser autorizada a gravação áudio e vídeo das aulas em que iam decorrer as tarefas de investigação (Anexo 2). Também todos os alunos foram atempadamente informados de que o tema das funções racionais iria ser leccionado de forma diferente através da exploração de várias tarefas de investigação. É de salientar que os alunos, após terem conhecimento das intenções da professora, de imediato se prontificaram a colaborar na experiência de forma entusiasmada e responsável.

4.2.3. Os grupos

Os alunos desta turma já tinham, antes do início desta experiência, trabalhado várias vezes em grupo, nomeadamente durante o 10.º ano. Desde o inicio do ensino secundário, nas diferentes tarefas de investigação que se foram realizando, mudaram várias vezes de grupo, pois era-lhes indiferente trabalhar com um ou outro colega. No entanto, é de salientar que apenas uma das alunas mostrou sempre interesse em trabalhar única e exclusivamente com um determinado grupo de colegas. Assim, antes do início da experiência a professora investigadora comunicou à turma que iria ser dividida em sete grupos: três de três elementos e quatro de quatro elementos.

Para o desenvolvimento da experiência, foi importante observar cada um dos grupos de trabalho, tornando possível tirar algumas conclusões sobre a importância da tarefa realizada em grupo no desenvolvimento da argumentação matemática dos alunos, assim como o contributo da utilização da calculadora gráfica nesse processo. Todos os grupos eram heterogéneos mas com pequenas diferenças entre os elementos que os constituíam (Anexo 3).

Todos os grupos, durante a investigação, desenvolveram um trabalho responsável e empenhado, sem nunca desistirem, apesar das dificuldades inerentes ao inicio da exploração de um tema que não foi previamente leccionado.

4.3. Recolha dos dados

Com o intuito de ser feita uma análise detalhada dos dados da investigação foram utilizadas diversas técnicas de recolha de dados, nomeadamente, observação, gravações áudio e vídeo das aulas em que decorreu a investigação e documentos escritos elaborados pelos alunos individualmente e em grupo. A utilização de várias fontes de informação é fundamental nos estudos de caso para que não se limitem a uma única fonte de evidência mas a um conjunto alargado de informações (Yin, 1989).

Para a realização deste estudo, a investigadora solicitou autorização aos Encarregados de Educação dos alunos da turma do 11.ºano, para efectuar a recolha de dados (Anexo 2). O processo de recolha de dados decorreu durante o mês de Fevereiro de 2010. No quadro seguinte faz-se um resumo das técnicas de recolha de dados utilizadas na presente investigação.

Tabela 3. Resumo descritivo das técnicas de recolha de dados

Técnicas de recolha de dados	Descrição
Observação	Registos escritos da professora investigadora sobre a observação das aulas. Gravação das aulas em que foram propostas tarefas de investigação com a utilização de duas câmaras de vídeo fixas, uma num canto da sala virada para os alunos e a outra a focar o quadro interactivo e um gravador áudio em cada um dos grupos de trabalho.
Documentos	Documentos produzidos pelos alunos, como relatórios escritos individualmente após trabalho realizado em grupo e discussão em turma e reflexões individuais sobre as tarefas propostas.

4.3.1. Observação

A observação representa uma importante forma de recolha de dados nos estudos qualitativos de carácter interpretativo, pois trata-se de uma ferramenta que permite obter informações que normalmente não são acessíveis de outra forma (Ludke & André, 1986). Segundo estes investigadores, a observação diz-se participante, quando se trata de um processo em que a professora investigadora interage com os participantes e estes têm consciência dos objectivos do estudo em que estão envolvidos. Assim, esta técnica de recolha de dados, em conjunto com outras, possibilita um contacto estreito e pessoal da investigadora com o fenómeno a ser investigado (Bogdan & Biklen, 2006).

Neste estudo foi dado principal destaque à observação participante, pois permitiu compreender detalhadamente o tipo de argumentação e de raciocínios utilizados na resolução das tarefas de investigação propostas e as conjecturas efectuadas pelos alunos. Durante todo o processo de investigação, a investigadora efectuou registos escritos relativamente aos episódios mais significativos e mais ricos em argumentação. Estas observações foram efectuadas durante a realização dos trabalhos em grupo e posteriormente nas discussões em toda a turma sobre as conclusões obtidas nas tarefas propostas. Foram também feitos registos vídeo e áudio das tarefas com o intuito de serem captados aspectos que de outra forma passavam despercebidos e que, se analisados fora do contexto da sala de aula, clarificam melhor todo o processo de investigação. Acerca deste aspecto, Bogdan e Biklen (2006) referem que "a abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, de que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto de estudo" (p.49). Como se pretende que nada significativo se perca, é importante que, a partir do momento do inicio da investigação, se tome nota de todo o processo.

Para o presente estudo foram utilizados gravadores áudio, nos diálogos desenvolvidos em pequeno grupo e câmaras de vídeo, nas discussões das conclusões das tarefas com toda a turma. Todos os diálogos desenvolvidos nos pequenos grupos como em grupo turma foram transcritos pela professora investigadora para posterior análise.

As tarefas de investigação foram elaboradas pela professora investigadora para que os alunos trabalhassem autonomamente. No âmbito do presente estudo, a professora construiu uma sequência de quatro tarefas de investigação.

4.3.2. Documentos

A recolha de informações a partir da análise de um conjunto de documentos reveste-se de uma grande importância num estudo de caso (Yin, 1989), na medida em que permitem a confirmação das diferentes inferências que resultam da análise de outras possíveis fontes de dados. Para este trabalho foram analisados: - os relatórios escritos elaborados individualmente pelos alunos e respectiva reflexão sobre o trabalho desenvolvido em cada tarefa; - as transcrições áudio e vídeo realizadas durante o decorrer da investigação; e - documento de natureza bibliográfica elaborado pela professora investigadora no início do ano lectivo com o objectivo de caracterizar a turma.

As tarefas propostas tinham como um dos objectivos que os alunos reflectissem sobre o trabalho desenvolvido. Esta actividade de reflexão baseia-se no pressuposto de que a comunicação escrita pode ajudar a pensar e a expor da melhor maneira as ideias, relacionando e sintetizando os conceitos e facilitando a assimilação, acomodação e personalização dos conteúdos matemáticos (Mett, 1987; Azzolino, 1990).

4.4. Análise dos dados

A análise dos dados tem como objectivo a interpretação de todo o material que foi recolhido durante a investigação de modo a dar-lhe sentido, para posteriormente ser divulgado de forma clara e bem organizada. Segundo Merriam (1988) a análise inicia-se no momento em que é efectuada a primeira observação. A partir da primeira análise podem resultar elementos que levam à necessidade de recolha de mais dados ou até que desencadeiam uma reformulação das questões de investigação previamente formuladas pelo investigador. No presente estudo a análise de dados foi realizada após se terem recolhido alguns dados relativos ao processo de investigação. Todo o material recolhido após a exploração de cada uma das tarefas foi posteriormente organizado e categorizado de forma a ser possível estabelecer relações entre as diferentes categorias consideradas para este estudo. Tendo então em conta o objectivo deste estudo, a professora investigadora elaborou as categorias de análise consideradas na tabela 4.

Tabela 4. Categorias de análise dos dados

1. Trabalho de grupo	• Argumentação matemática	• Formulação e teste de conjecturas
		• Da conjectura à prova
	• Calculadora gráfica	• Contributos
		• Dificuldades
2. Discussão na turma	• Argumentação matemática	• Formulação e teste de conjecturas
		• Da conjectura à prova
	• Calculadora gráfica	• Contributos
		• Dificuldades
3. Relatório e reflexão	• Argumentação matemática	• Formulação e teste de conjecturas
		• Da conjectura à prova
	• Calculadora gráfica	• Contributos
		• Dificuldades

A estrutura definida pela investigadora para a realização da análise de dados, de acordo com as categorias consideradas, obedeceu a uma descrição detalhada de cada uma das tarefas no que se refere à argumentação matemática e à utilização da calculadora gráfica. Para a análise de cada uma das diferentes tarefas, foi mantida sempre a mesma estrutura.

4.5. As tarefas

A elaboração e a selecção de tarefas para a efectivação desta experiência foram realizadas pela professora investigadora de forma ponderada, fruto de uma pesquisa exaustiva sobre o tema das funções racionais e de modo a estarem de acordo com o nível cognitivo dos alunos da turma em estudo. Antes da implementação da primeira tarefa a professora investigadora apresentou e entregou a todos os alunos dois documentos (Anexo 4), onde que constavam os aspectos importantes a ter em conta para a investigação da sequência de tarefas, nomeadamente, como se deveria desenvolver o trabalho em pequeno grupo, a discussão em grande grupo e como deveriam elaborar o relatório.

Como, neste estudo, se pretendia que os alunos desenvolvessem o modo de argumentar matematicamente assim como adquirissem um espírito crítico relativamente à utilização da calculadora gráfica, foi posteriormente implementada, uma sequência de quatro tarefas de investigação (Anexo 5), sobre o tema das funções racionais e que iniciou com o trabalho de grupo, posteriormente com a discussão na turma e finalmente com a elaboração dos relatórios de investigação.

Na primeira, segunda e quarta tarefa o aluno era incentivado a investigar, elaborando diferentes conjecturas de forma a encontrar possíveis generalizações, para cada uma das famílias de funções, em estudo. Para tal, o aluno deveria atribuir diferentes valores a cada um dos parâmetros de modo a estudar a sua influência. A professora investigadora com a implementação destas tarefas teve como objectivo que os alunos, ao estudarem a alteração dos diferentes parâmetros na família de funções dadas, compreendessem melhor a sua influência no comportamento gráfico das mesmas.

A terceira tarefa era de cariz mais prático e pretendia que os alunos aplicassem o estudo desenvolvido nas duas primeiras tarefas e descobrissem uma expressão algébrica da função que permitisse determinar as dimensões de todos os rectângulos que verificassem as propriedades consideradas no enunciado da tarefa. Esta tarefa tinha como objectivo que os alunos explorassem o gráfico da função racional e que estes desenvolvessem o espírito crítico em relação aos resultados fornecidos pela calculadora gráfica, indo de encontro com um dos objectivos do programa, que considera que os alunos devem explorar modelos matemáticos que representem funções reais.

Durante a implementação das tarefas a professora investigadora, enquanto observadora participante, procurou estar atenta às estratégias, raciocínios e dúvidas suscitadas pelos alunos de modo que todos mantivessem sempre uma postura de cariz investigativo.

4.6. Planificação das tarefas

Os alunos ao realizarem tarefas de investigação desenvolvem a capacidade de explorar, conjecturar, provar, justificar, comunicar e de argumentar matematicamente, assim como o de trabalhar de forma autónoma e criativa (Ponte et al., 1999; Segurado, 2002; Rocha, 2002; Perez & Diogo, 2005; Boavida et al., 2008). Ao serem planificadas as tarefas de investigação deve-se ter em conta vários factores pensados de acordo com os alunos em questão e com aspectos que vão desde as estratégias de aprendizagem, ao nível dos seus conhecimentos, ao ambiente da turma e às interacções que se esperam que ocorram na sala de aula. Os alunos ao serem envolvidos em tarefas de investigação são questionados não apenas para produzirem as suas respostas mas também para mostrarem e justificarem os processos desenvolvidos para encontrarem as respectivas soluções (Cai et al., 1996). Este tipo de tarefas motivam e apelam à criatividade da matemática e proporcionam o desenvolvimento da capacidade de reflectirem durante e após as actividades (Perez & Diogo, 2005).

Numa aula ou conjunto de aulas, uma actividade de investigação desenvolve-se em três fases: (i) introdução da tarefa em que o professor propõe à turma, oralmente ou por escrito, a actividade a desenvolver; (ii) realização da tarefa de investigação individualmente, em grupo de pares, em pequenos grupos ou em grupo-turma e por último (iii) discussão dos resultados obtidos na investigação em que os alunos transmitem aos restantes colegas da turma as conclusões à tarefa (Brocardo, 2001; Ponte et al., 2006).

Para a presente investigação, no âmbito de desenvolver a capacidade de argumentar matematicamente, a professora inicialmente procedeu à elaboração de várias e diversificadas tarefas de investigação, constituindo uma sequência, que proporcionassem aos alunos várias experiências em que a calculadora gráfica fosse utilizada de forma adequada e crítica. A selecção das tarefas foi efectuada de modo a estarem de acordo com o nível cognitivo dos alunos. O estudo foi desenvolvido no capítulo das *Funções* visto ser um assunto importante e em que os alunos habitualmente têm algumas dificuldades na interpretação e aplicação a situações reais.

As aulas que foram dedicadas à exploração das tarefas desenvolveram-se em quatro diferentes fases: (i) breve introdução à tarefa; (ii) exploração da tarefa em pequeno grupo; (iii) discussão em grande grupo sobre as conclusões obtidas na investigação da tarefa; e (iv) elaboração de um relatório escrito individualmente e respectiva reflexão. Pelo facto de que um dos objectivos desta experiência ser o estudo da evolução da argumentação matemática no desenvolvimento das diferentes tarefas, a professora investigadora deu atenção a todas as fases da investigação da tarefa. No entanto, à quarta fase foi dado especial relevo por se tratar da elaboração de um relatório em que cada aluno tinha que escrever todo o processo de investigação desenvolvido pelo seu grupo de trabalho e especialmente a sua interpretação, conclusão e reflexão sobre cada uma das tarefas propostas.

A planificação das tarefas (Anexo 6) foi efectuada pela professora investigadora de modo que os alunos autonomamente investigassem o comportamento gráfico das funções racionais e que tirassem algumas conclusões sobre algumas das noções associadas ao conceito de função, tais como: o domínio, o contradomínio, monotonia, extremos e assimptotas.

Para a realização do presente estudo, a investigadora efectuou uma planificação de forma a ser leccionado o tema das funções racionais durante o mês de Fevereiro. No entanto, devido à interrupção das aulas relativamente às férias de Carnaval e devido à necessidade que a professora investigadora sentiu em prolongar algumas das tarefas para que os alunos tivessem mais tempo para as explorar devidamente, a aplicação das tarefas sofreu alguns ajustes (Anexo 7).

É de salientar que na realização das diferentes tarefas, a professora investigadora tentou nunca limitar o tempo relativo ao processo de investigação desenvolvido por cada um dos grupos, nem na discussão em grupo turma. Para a discussão em grande grupo, foi utilizado o quadro interactivo com a calculadora gráfica instalada, para que pudessem ser gravadas todos os "flipchart" relativos a cada uma das tarefas. É de referir também que, a maioria dos grupos começou a sua investigação sem a utilização da calculadora gráfica, no entanto, sentiram necessidade do seu uso pouco tempo após o seu inicio. Na tarefa 3 os alunos inicialmente não sentiram a necessidade da utilização da calculadora gráfica e só se aperceberam da sua necessidade quando a professora investigadora perguntou se já tinham encontrado a expressão analítica da função que permitia descobrir todos os rectângulos em que o seu perímetro era igual à sua área.

Durante todas as tarefas a professora investigadora incentivou os alunos a explorarem ao máximo todas as versatilidades da calculadora gráfica de forma a retirarem a maior parte das informações necessárias para a concretização e investigação das tarefas propostas.

CAPÍTULO 5

Resultados

Neste capítulo é feita a apresentação dos resultados obtidos que serviram de base para dar resposta às questões de investigação previamente formuladas no inicio desta dissertação. São apresentados os resultados de cada uma das tarefas de acordo com as categorias de análise seguintes: a argumentação matemática (formulação e teste de conjecturas; da conjectura à prova) e a calculadora gráfica (contributos e dificuldades). Estas categorias vão ser analisadas de acordo com as diferentes fases em que decorreu a investigação, nomeadamente, no trabalho de grupo, na discussão na turma e no relatório e reflexão.

A elaboração das tarefas sobre as funções racionais foi feita pela professora investigadora de acordo com uma sequência que permitisse aos alunos a aquisição continuada de conhecimentos de uma forma autónoma. A experiência desenvolveu-se inicialmente em pequenos grupos, posteriormente em grande grupo de discussão e finalmente com a elaboração de um relatório escrito individual que incluía uma reflexão sobre a tarefa proposta. Assim, no início da experiência os alunos da turma foram divididos em três grupos de três elementos e quatro grupos de quatro elementos. Posteriormente, a professora investigadora distribuiu a todos os alunos dois documentos.

Num desses documentos constavam os aspectos importante a terem em conta no desenvolvimento do trabalho de grupo e na discussão em grande grupo. O outro documento referia que na elaboração do relatório individual de investigação os alunos deviam contemplar a descrição pormenorizada de todo o processo de investigação, nomeadamente: (i) os raciocínios efectuados; (ii) as conjecturas seguidas e abandonadas, argumentando sobre o porquê das suas opções; (iii) as conclusões a que chegaram e se os argumentos apresentados foram suficientes para constituírem uma prova para a tarefa de investigação apresentada. No mesmo relatório devia também constar uma apreciação crítica da actividade, assim como uma apreciação autocrítica de cada elemento do grupo na sua intervenção no trabalho desenvolvido. Na realização dos trabalhos de grupo os alunos utilizaram a calculadora gráfica e na discussão desenvolvida em grande grupo foi utilizado o quadro interactivo com a calculadora gráfica previamente instalada.

5.1. Tarefa1

A tarefa 1 que foi elaborada de forma a introduzir o capítulo das funções tinha como objectivo que o aluno investiga-se como é que variava o gráfico da função $g(x)=1/f(x)$, inversa da função afim $f(x)=ax+b$, em que os parâmetros a e b pertenciam ao conjunto dos números reais. Nesta tarefa os alunos eram incentivados a explorar uma das famílias mais simples de funções racionais, de forma a introduzir o tema e em que a utilização da calculadora gráfica era fundamental para a sua exploração.

Esta tarefa decorreu em duas aulas de 90 minutos mais 45 minutos de uma outra aula que não estava prevista. A investigadora sentiu a necessidade de dispensar mais tempo para os grupos partilharem com os seus colegas todos os resultados obtidos durante a investigação., bem como para dedicar mais tempo para a discussão em grande grupo.

5.1.1. O trabalho de grupo

Na tarefa 1 o trabalho de grupo desenvolveu-se ao longo de aproximadamente uma aula e meia. Todos os grupos empenharam-se e esforçaram-se na procura das possíveis conclusões da tarefa proposta. As gravações desenvolvidas por cada um dos grupos foram transcritas e analisadas de forma a serem tiradas algumas elações relevantes para o presente estudo. Assim, de seguida é feita uma análise relativamente à argumentação matemática e à utilização da calculadora gráfica durante o trabalho desenvolvido por alguns dos grupos.

A argumentação matemática

Relativamente à argumentação matemática presente nas discussões em pequenos grupos faz-se de seguida uma análise relativamente às conjecturas seguidas e às abandonadas assim como aos argumentos apresentados. Pretende-se também verificar se os alunos sentiram a necessidade de provar a veracidade das conjecturas seguidas ou se apenas chegaram a uma generalização para a família de funções proposta na tarefa 1.

Formulação e teste de conjecturas

Na fase de *apropriação* os alunos começaram por tentar entender o que é que se pretendia investigar na primeira tarefa. Esta fase inicial para alguns grupos foi demorada pois, para além de ser a primeira tarefa a ser explorada, o tema das funções racionais também era novo. Por exemplo, o *grupo 1* no inicio do trabalho referiu:

Fausto: Nós temos de saber como varia $g(x)$ em relação à função $f(x)$.
Elisa: Sim, mas pode ser uma expressão qualquer.
Fausto: Então temos de pôr $1/f(x)$.
Júlia: O que eu fazia era atribuir valores às incógnitas a e b.
Alexandra: Então podemos pôr $a=2$ e $b=5$.
Elisa: Então ponham na máquina: $2x+5$.
Alexandra: Eu ponho a inversa: $1/(2x+5)$.
Júlia: E tentamos comparar as duas.
Fausto: Olha a $f(x)$ dá uma recta e a $g(x)$ dá duas curvas.
Elisa: Olha na primeira $f(x)$ tem um zero e deve ser para aí $-2,5$.

Neste diálogo é notório que para além do grupo trabalhar como uma equipa, não demonstraram dificuldade em entender o que é que se pretendia com esta tarefa. Os alunos de imediato atribuíram valores às variáveis a e b e verificaram quais os gráficos que se podem obter para a função afim e respectiva inversa.

O *grupo 2*, relativamente à fase de apropriação da tarefa, começou de imediato a formular e testar conjecturas. Também é de salientar que este grupo não iniciou o seu trabalho a atribuir valores aos diferentes parâmetros, mas a tentar entender o que é que se pretendia com a presente investigação.

Luísa: Investiga com varia o gráfico da função $f(x)$...
Sónia: Para investigar, pegamos na função $f(x)=ax+b$ e inventamos valores para a e b e substituímos em baixo para ver como é que fica a $g(x)$.
Julieta: Pois. Isto é o inverso porque é sobre qualquer coisa.
Luísa: Temos de aumentar o declive e o valor da ordenada na origem no eixo das ordenadas e depois ver como varia.
Sónia: É isso.

No entanto, houve grupos que tiveram dificuldade em iniciar a investigação pois não entenderam a forma como a tarefa estava formulada. Uma das dificuldades evidenciadas foi o de não se lembrarem do conceito de inversa de uma função, e também o de função afim. Este caso é evidenciado nos diálogos do *grupo 4* quando referem que o inverso de 5 é -5.

Flora: Temos de inventar números para ver o que é que dá.

Rafaela: Vamos lá. Primeiro temos de dar números ao a e b de modo a termos $f(x)$...
Amélia: Pode ser um número qualquer não pode?
Rafaela: Sim, eu acho que sim.
Flora: Vamos escrever o que fizemos primeiro. Que valores é que damos a a ?
Rafaela: Se é a função inversa, $g(x)$ é a função inversa...
Flora: Sim...
Amélia: Se uma é 5 a outra é -5, não? É o inverso. Não?

Amélia teve dúvidas sobre a inversa de uma função e questionou as colegas relativamente ao que afirmou, no entanto ninguém respondeu à sua questão. A dúvida só viria a ser esclarecida quando o grupo questionou a professora sobre esse facto e só a partir desse momento é que entenderam o que é que se pretendia investigar e começaram a atribuir valores aos parâmetros a e b. Os restantes grupos iniciaram a sua investigação da mesma forma que o grupo 1 e 2.

Seguidamente, todos os grupos começaram a fase da *exploração* a atribuir valores aleatórios aos parâmetros a e b e tentarem encontrar algumas regularidades de forma a obterem possíveis conclusões para a tarefa proposta. Por exemplo, o *grupo 2* começou a atribuir valores e ao mesmo tempo a construir as suas conjecturas tentando sempre verificar a sua veracidade. Constatou-se que sentiram a necessidade de provar, no entanto, nunca o fizeram ao longo de toda a investigação

Julieta: Vamos lá. Vamos substituir valores a e b na função $f(x)$. Por exemplo $a=1$.
Luísa: Menos...
Julieta: Menos?
Sónia: $a=0$ e $b=0$. Fica $y=0$.
Luísa: Podíamos começar por um valor negativo e depois outro valor negativo maior do que esse para vermos a variação da função.
Julieta: Pois.
Luísa: Sempre que o declive for negativo, a recta...
Sónia: Desloca-se para a esquerda.
Luísa: Atravessa o 2° e o 4° quadrante e quando é positivo atravessa o 1° e o 3° quadrante.
Julieta: Não se b for diferente de 0 atravessa 3 quadrantes.
Luísa: Mas quando $b=0$...
Sónia: ... se o declive é positivo a função desloca-se para a direita e se o declive é negativo a função desloca-se para a esquerda.
Luísa: Sim e agora... Se a for igual a ...
Sónia: ... a 2 e $b=4$.
Julieta: Oh atravessa três quadrantes.
Luísa: Agora para valores maiores que 4.
Julieta: Para quê?
Luísa: Para ver a diferença.

Sónia: Pois, mas nós já sabemos.
Julieta: Sim, mas temos de demonstrar.
Luísa: Então… vamos dizer que quanto maior for o b … não! Como é que vamos dizer?
Sónia: Vamos falar primeiro do parâmetro a.
Julieta: Então… quanto maior for o valor de a, maior é a inclinação.
(…)
Sónia: Podemos dizer que o valor de a apenas influência a inclinação da recta.
Luísa: E agora, à medida que aumentamos o valor de b a recta vai sofrer uma translação para cima.

Neste diálogo é evidente que este grupo formulou as suas conjecturas e, com o auxílio da calculadora gráfica tentou provar a sua veracidade. As alunas denotaram uma grande organização no trabalho de grupo e ao mesmo tempo verificou-se que compreenderam a tarefa devido à conexão que estabeleceram com os conceitos matemáticos adquiridos em anos anteriores.

Da conjectura à prova

Após várias conjecturas, por exemplo, o *grupo 2* conseguiu com alguma facilidade e organização chegar a algumas das conclusões.

Luísa: Agora vamos tirar algumas conclusões. Quando $a > 0$ …
Sónia: Como é que dizemos aqui? Quanto maior for o valor de a na função $f(x)$, mais próxima está a hipérbole da origem do referencial.
Luísa: Agora, quando atribuímos valores negativos ao a, a hipérbole vai ser simétrica em relação à origem.

Um dos conceitos sobre o qual todos os grupos tiveram dificuldades, foi a noção de assimptota quer ao nível gráfico quer ao nível de escrever a sua equação. Este facto não é de estranhar visto que se trata de um conceito novo que é introduzido apenas no 11.º ano quando se inicia o capítulo das funções racionais. O *grupo 5* denominou as assimptotas de "buracos", "paragem" ou "falha".

Professora: Qual é a função afim que consideraram inicialmente?
David: $f(x) = 3x + 2$.
Professora: Reparem no gráfico da função… Atenção que na calculadora têm o menu tabela que permite calcular todos os valores da função…
David: Tem aqui uma paragem.
Rosa: Isto é as assimptotas.
João: São os "buracos".

A maioria dos grupos quando de deparou com um gráfico de uma função em que existia uma interrupção denominou-os de imediato de "buracos" da função. Posteriormente, a professora informou todos os grupos que o nome que matematicamente se atribuí às *falhas* nas funções é o de assimptotas e que estas podem ser verticais ou não verticais.

Todos os grupos durante os seus trabalhos sentiram sempre a necessidade de nas conclusões fazer um estudo da família de funções, dada na tarefa. Por exemplo, o *grupo 5* estudou o domínio, o contradomínio, a injectividade, as assimptotas, entre outras noções.

> *João:* Quando $b = 0$, o domínio é $IR \setminus \{0\}$.
> *Aurora:* Vamos ver o contradomínio. Ora o contradomínio é $IR \setminus \{0\}$. A função não é injectiva.
> *Professora:* Vejam no *menu table*.
> *Aurora:* Os valores variam, não há iguais então é injectiva.
> *João:* Contínua é que não é.
> *Aurora e Rosa:* Claro!
> *Aurora:* Vamos ver a paridade. Como é que se verifica analiticamente?
> *João:* Acho que é $g(x) = -g(x)$.
> *David:* Não é injectiva.
> *Aurora:* É injectiva.
> *David:* Não é, mas não é!
> *Aurora:* Traças aqui uma linha David, nunca passa no mesmo ponto.

Neste grupo, durante toda a investigação houve muita discussão porque dois dos seus elementos, a Aurora e o David, tinham diferentes maneiras de pensar e de argumentar, no entanto, chegaram sempre a um consenso. O *grupo 1*, no final da investigação efectua também o estudo da função mas de uma forma mais organizada e coerente. É de registar que todos os argumentos apresentados por este *grupo 1* eram sempre válidos.

> *Alexandra:* Vamos agora ver o domínio e o contradomínio. A injectividade, a continuidade...
> *Fausto:* Sim, mas primeiro devíamos modificar as letras a e b para ver se há alterações.
> (Após modificar os números)
> *Elisa:* Olha se aumentarmos o valor de b a assimptota vai para a esquerda e se diminuirmos vai para a direita.
> *Júlia:* Se modificarmos o a, quase nem se percebe o que é que acontece.
> *Alexandra:* Então muda-se o sinal. Se o a for negativo muda a monotonia. Fica crescente.
> *Elisa:* Já temos o domínio, o contradomínio, a monotonia, as assimptotas.
> *Fausto:* A função é injectiva.
> *Elisa:* Só nos falta a continuidade e a paridade. Será que é contínua?
> *Júlia:* Deve ser contínua excepto na assimptota ou então descontínua.
> *Professora:* É contínua excepto na assimptota.
> *Alexandra:* Ela não é simétrica nem em relação à origem nem em relação ao eixo dos yy. Então não é par nem é impar.
> *Elisa:* Mas se repararmos ela é simétrica em relação à assimptota.
> *Fausto:* Então é impar mas em relação à assimptota.

A maioria dos grupos, no final da investigação chegou a uma generalização e a uma conclusão para o comportamento das funções da família dada na tarefa 1. O *grupo 1* salientou no seu diálogo que, por exemplo a equação da assimptota vertical é $x=-b/a$.

Fausto: Tem de haver uma fórmula que nos dê o valor da assimptota.
Elisa: Para acharmos os zeros iguala-se a expressão a zero, e vemos que dá ... A expressão que der é o valor da assimptota.
Alexandra: Então a expressão é $x=-b/a$.
Fausto: Substitui essa expressão para os valores 2 e 5 que consideramos anteriormente.
Elisa: Sim a expressão está certa pois o valor da assimptota dá $-2,5$.
Alexandra: Mas como aqui a professora pede as expressões gerais, o domínio fica $IR\setminus\{-b/a\}$.
Júlia: E o contradomínio qual é?
Fausto: Olha o contradomínio é no eixo dos *yy* por isso é $IR\setminus\{0\}$, porque se virmos no gráfico a função não toca no zero.
Alexandra: Mas então isso também é uma assimptota. E será que é sempre zero?
Elisa: Muda-se os valores e vemos se muda ou não. Se mudar tentamos ver se também há alguma expressão.
(...)
Elisa: Não muda.
Júlia: Então pronto, a assimptota horizontal é sempre 0.

Neste *grupo 1* é evidente a formulação de conjecturas e a necessidade que os alunos têm de verificar para todos os casos obtendo assim uma generalização. Constata-se que os alunos limitam-se, como já referi anteriormente, a verificar para alguns exemplos a veracidade das suas conclusões e não provam verdadeiramente para todos os casos. No entanto, os argumentos apresentados pelo grupo são válidos e justificativos das conclusões obtidas através da experimentação com a utilização da calculadora gráfica.

Verificou-se com este trabalho de grupo que os alunos na sua maioria apresentam argumentos válidos para as suas conjecturas, no entanto, não efectuam a verificação para todos os casos e fazem-no apenas para alguns. O exemplos que os alunos consideram para tentarem chegar às conclusões da tarefa 1 não são provas mas sim generalizações.

A calculadora gráfica

A calculadora gráfica durante esta tarefa 1 foi utilizada imediatamente após a fase de apropriação. Na maioria dos grupos existia uma calculadora por aluno, no entanto, utilizaram duas máquinas ou apenas uma, para formularem, testarem e reformularem as suas conjecturas. Verificou-se durante a investigação que os alunos não demonstraram dificuldades em utilizar e em alterar a janela de visualização de acordo com os valores que iam atribuindo aos diferentes parâmetros a e b. Assim, os alunos demonstraram ser críticos relativamente aos resultados que o visor da máquina lhes mostrava alterando a janela de visualização sempre que não era possível visualizar o gráfico de uma determinada função. As dificuldades surgiram mais nos casos em que os alunos pretendiam verificar as coordenadas de alguns pontos relevantes no gráfico de uma determinada função para que fossem tiradas algumas conclusões importantes, como é o caso, das equações das assimptotas. Como alguns dos grupos não demonstraram a intenção de usar o *menu table* na calculadora gráfica, a professora investigadora sentiu a necessidade de propor a sua utilização chamando atenção para as vantagens desta opção.

Contributos

Os sete grupos de trabalho desenvolveram esta tarefa de investigação com a utilização, de uma forma sistemática, da calculadora gráfica. Todos os grupos nas suas discussões têm evidências do contributo que a calculadora gráfica teve na formulação, teste e reformulação de conjecturas e nas tentativas de prova das conclusões para todas as funções da família dada. Na discussão desenvolvida pelo *grupo 7* verificou-se que os alunos utilizaram adequadamente a calculadora gráfica na investigação realizada, que consistia em estudar como variava o gráfico da função quando se alterava os valores atribuídos a cada um dos parâmetros.

> *Dora:* Ora bem, vamos ter de dar valores a a e a b. Depois inserimos na máquina dando valores diferentes aos parâmetros a e b para vermos como é que varia a função g.
> *Rui:* Os primeiros valores podem ser $a=1$ e $b=1$.
> *Vitória:* Temos de ver a janela e tudo isso ...
> *Rui:* Basta pôr $x+1$ na máquina, então ...
> *Vitória:* ... fica $1/(x+1)$.
> *Rui:* E tem de se colocar parênteses.

Note-se que estes alunos preocuparam-se em estudar a primeira função que consideram usando a janela de visualização, assim como têm cuidado na forma como escrevem a sua expressão algébrica no *menu graph* da calculadora para obterem o gráfico da função. O *grupo 2* no seu estudo da família de funções, vai dando valores a a e a b de forma a verificarem qual vai ser o seu comportamento gráfico.

> *Luísa:* Consideremos por exemplo $a=1$ e $b=0$. Então $g(x)=1/x$. Vamos ver o que é que isto dá. Depois vamos aumentar o declive.
> *Julieta:* Agora, $a=2$ e $b=0$, então $g(x)=1/2x$.

Sónia: Vamos pôr agora um valor mais elevado, $a=5$ e $b=0$, então $g(x)=1/5x$.
Luísa: Agora 10?
Julieta: $a=10$ e $b=0$, $g(x)=1/10x$. Vamos mudar agora...
Luísa: Pode ser negativo. Então $a=-1$ e $b=0$, $g(x)=1/(-x)$.
Sónia: Depois -5 e -10...
Julieta: Fica mais afastado...

Neste grupo, ao usarem a calculadora gráfica de forma adequada, permitiu que estudassem vários gráficos em simultâneo e que tirassem conclusões relativas ao que o visor da máquina mostrava.

Ao analisar os diálogos desenvolvidos pelo *grupo 1* verificou-se que os alunos por diversas vezes durante a investigação recorram à calculadora gráfica para poderem testar as suas conjecturas relativamente à existência de zeros e de assimptotas.

Fausto: Olha a $f(x)$ dá uma recta e a $g(x)$ dá duas curvas.
Elisa: Olha na primeira $f(x)$ tem um zero e deve ser para aí $-2,5$.
Júlia: Espera aí vai-se ver na máquina. O *root* dá $-2,5$... Tens razão.
Fausto: Mas a função $g(x)$ não tem zeros.
Elisa: Pois não mas tem tipo uma interrupção ... deve ser uma assimptota.

É através da análise dos gráficos das funções f e g que os alunos deste grupo chegam a uma conjectura relativamente aos zeros da função f, à confirmação de que a função g não tem zeros e à existência de uma interrupção que os alunos de imediato associam à noção de assimptota. De uma forma geral, podemos concluir que a calculadora gráfica contribui, positivamente para o desenvolvimento dos argumentos dos alunos de modo a justificarem as conjecturas previamente formuladas.

Dificuldades

Uma das dificuldades que os alunos demonstraram, inicialmente na exploração da tarefa, diz respeito à representação gráfica da função inversa. Ao representarem graficamente no caderno a função g, consideraram que a assimptota fazia parte do gráfico da função passando a considerar como um valor que pertencia ao domínio.

Flora: Consideremos a função $f(x)=x+2$. Vamos estudá-la ...
Conceição: É injectiva quando tem um zero.
Flora: Então tem um zero, é injectiva ... Rafaela, o zero é -2.
Rafaela: Eu não consigo encontrar os zeros.
Conceição: Coloca *Shift, G-Solv* e *Root.*
Rafaela: Os zeros são -2.

Flora: Só há um zero.
Conceição: Por isso é que ela é injectiva, só tem um zero.
Rafaela: Vamos estudar agora a função inversa $g(x) = 1/(x+2)$. O gráfico é …
Conceição: Isto aparece assim … o gráfico da função tem fim …
Flora: Tem?
Conceição: Tem.
Flora: Isto não tem fim, o gráfico da função não pára.
Rafaela: Na tua máquina Conceição o gráfico está diferente, aparece ali uma recta e tudo no meio.
Flora: Não tem zeros.
Rafaela: Também não tem paridade, não é contínua e o domínio é *IR* e o contradomínio também.

É de referir que os elementos deste *grupo 4* trabalharam com calculadoras gráficas de marcas diferentes. Assim, o facto de Rafaela referir que a representação gráfica que obteve na sua calculadora era diferente da do outro colega deveu-se ao facto do visor da calculadora mostrar o gráfico e a respectiva assimptota vertical. Daí o comentário de Rafaela de que o gráfico estava diferente pois tinha uma recta ao meio. O *grupo 4* cometeu erros na construção das suas conjecturas e nos argumentos que apresentou com o intuito de as validar devido a terem dificuldades ao nível de conceitos matemáticos e não devido ao manuseamento incorrecto da calculadora gráfica. Assim, nesta tarefa as dificuldades identificadas resultam da dificuldade da interpretação do gráfico da função que o visor da calculadora gráfica mostrava. Esta dificuldade manifestou-se principalmente, quando os alunos compararam os gráficos obtidos em duas calculadoras, de marcas diferentes.

A discussão desenvolvida, devido à análise dos gráficos em duas calculadoras gráficas de marcas diferentes, contribuiu positivamente para que os alunos apresentassem diferentes argumentos que justificassem, o que o visor mostrava.

5.1.2. Discussão na turma

A discussão da tarefa 1 foi realizada na segunda aula, após conclusão do trabalho de grupo. Por ter sido dedicado pouco o tempo à discussão e pelo facto de algumas das conclusões importantes da tarefa ainda não terem sido discutidas, a professora investigadora entendeu que se deveria prolongar para o inicio da aula seguinte. Durante a discussão. os alunos mantiveram-se posicionados nos seus grupos de trabalho.

A argumentação matemática

A argumentação matemática presente na discussão com toda a turma foi mais completa e coerente relativamente ao trabalho desenvolvido em grupos. Este facto é notório quando após a transcrição da discussão desenvolvida na turma se verifica que todos os alunos tentaram participar, individualmente ou como membros pertencentes a um grupo.

Formulação e teste de conjecturas

Na fase inicial da discussão em grande grupo a professora começou por fazer uma breve introdução, ao mesmo tempo que ia colocando no quadro interactivo o enunciado da primeira tarefa de investigação.

> *Professora:* Nós começamos pela tarefa que eu vos propus, a tarefa 1 em que é dada uma função afim $f(x)=ax+b$... e é-nos dada uma função inversa dessa função afim $g(x)=1/f(x)$ ... e pretende-se que trabalhem com esta função... no fundo que alterem os parâmetros de a e de b ... e como vocês disseram a função $g(x)$ fica igual a $1/(ax+b)$. E agora o que eu pretendo é que vocês me digam como é que pensaram... Qual foi a vossa ideia inicial?

A professora chamou também a atenção que os alunos deveriam explicar com cuidado e na sua vez como é que chegaram aos resultados obtidos e questionar sempre os colegas caso não entendessem o que estava a ser afirmado. Após esta breve introdução a professora passou a palavra aos alunos e estes começaram por referir como é que iniciaram a fase de *apropriação* à tarefa proposta.

> *Elisa:* Dar valores a a e a b...
> *Aurora:* Atribuir valores a a e a b...
> *Professora:* Muito bem e...
> *Aurora:* e ver como é que eles variam...
> *Raul:* Nós fizemos primeiro...
> *Professora:* Diz Raul...
> *Raul:* Estabelecemos uma função mais simples e consideramos que essa função seria a nossa original ... e a partir daí comparamos...
> *Professora:* Então começa...

Entretanto Raul dirigiu-se ao quadro e escreveu o raciocínio inicial do seu grupo (fig.7).

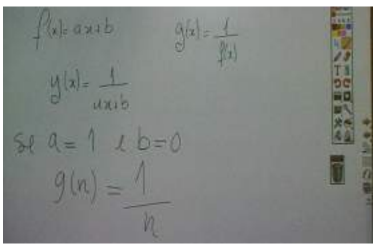


Figura 7. *Flipchart* A da tarefa 1 escrito por Raul

Conforme Raul escrevia a professora chamava a atenção para que depois cada um dos alunos se prenunciasse sobre o que estava a ser escrito. De seguida, Raul argumentou sobre o porquê de ter considerado como função original $g(x)=1/x$. É de salientar que sempre que os alunos indicaram os valores que consideraram inicialmente para os parâmetros a e b sentiram a necessidade de efectuar o estudo da função resultante. Passou-se, assim à fase de *exploração* da tarefa em que os alunos vão argumentando sobre o porquê das conjecturas que vão efectuando.

Raul: Começamos por considerar $a=1$ e $b=0$ ... e a primeira função que obtivemos foi $g(x)=1/x$. E foi esta a nossa função original...
Professora: E que gráfico é que obtiveram?
Célia: Não havia cruzamentos com o eixo do xx e do yy ...
Professora: Em relação a esta função que conclusões é que tiraram? O Raul disse que começou com a função mais simples que foi obtida considerando o $a=1$ e $b=0$ ... Todos os grupos pensaram assim? Todos vocês pensaram desta forma?
Alguns alunos: Sim...
Elisa: Nós vimos com outros valores...
Professora: Agora pergunto-vos, que conclusões tiraram com esta função?
Duarte: É impar...
Professora: Esta função é impar... mais...
Raul: É injectiva... não havia zeros...
Professora: Não tem zeros. E porque é que não tem zeros?
Fausto: Nunca chega a cruzar o eixo dos xx ...
Professora: Mais...
Raul: $x=0$ é uma assimptota e $y=0$ é outra assimptota...
Professora: Sim...
Célia: ...o domínio e o contradomínio é $IR\setminus\{0\}$.
Professora: O domínio e o contradomínio é $IR\setminus\{0\}$. Toda a gente está de acordo?
Todos: Sim...
Professora: Mais conclusões que tiraram relativamente à primeira função se todos chegaram à mesma...
Raul: É uma hipérbole...
Professora: A curva é uma hipérbole...
Alexandra: É contínua excepto em zero.
Professora: Exactamente...Ouviram a Alexandra?
Fausto: Descontinua excepto na assimptota.
Raul: Não continua excepto na assimptota.

Os alunos, até esta fase da discussão, limitaram-se a referir o estudo que realizaram sobre a função mais simples que obtiveram, quando atribuíram inicialmente os valores aos parâmetros $a=1$ e $b=0$. Quando Alexandra a determinado momento, conjectura que a função inicialmente considerada é injectiva e Luísa fica na dúvida, a professora investigadora aproveita para que os alunos argumentem sobre o porquê de ser injectiva e a forma como raciocinaram para chegarem a essa conclusão.

Alexandra: É injectiva.
Luísa: É injectiva?
Professora: Porque é que perguntas isso? A Luísa colocou um ponto de interrogação. Ela disse: É injectiva? Ficou com aquela ideia que alguma coisa que aqui não está bem. Será que sim ou será que não? Como é que pensaste para concluíres que não é injectiva? Ou que podia ser injectiva?
Luísa: Professora, como é aquele teste da recta paralela?
Professora: Recta paralela ao eixo dos ...
Alunos: ... dos xx .
Luísa: Mas a função numa parte é constante...
Aurora: Ela ali parece constante, mas não é constante...
Professora: Como é que vocês conseguem ver se ela é constante ou não?
Alunos: Vamos à máquina...
Elisa: Vamos à tabela...

Quando Luísa fica na dúvida relativamente à conjectura proferida por Alexandra, de que a função considerada inicialmente é injectiva, os restantes alunos da turma demonstraram que também não entenderam esse conceito e tentam assim, com a utilização da calculadora gráfica testar se a conjectura era válida ou não. Para tal, inicialmente utilizaram o *menu graph* e, posteriormente, para testarem a veracidade da conjectura, estudaram os pontos pertencentes ao gráfico da função, recorreram ao *menu table*. Como Raul ainda se mantinha perto do quadro interactivo, a professora propôs-lhe mostrar os valores da tabela pertencente ao gráfico da função g . No entanto, a professora após alguns momentos desta discussão, apercebeu-se que uma das dificuldades dos alunos, era o de relembrarem o conceito de injectividade e, a partir desse momento a dúvida deixou de existir.

Professora: O que o Raul está a tentar fazer é o de mostrar que para valores diferentes de x existem imagens iguais ou não?
Raul: Não.
Professora: Então é injectiva ou não?
Raul: É injectiva
Luísa: Não é injectiva.
Professora: Atenção o que é que é ser injectiva? Qual é a definição de função injectiva? Luísa o que é que é ser injectiva?
Luísa: Dados dois objectos diferentes, eles têm imagens diferentes...
Professora: Então a função é...
Luísa: É injectiva.

Na aula seguinte, quando se concluiu a discussão da tarefa 1, a professora relembrou o enunciado da tarefa proposta na última aula. Os alunos começaram por indicar as conjecturas formuladas pelos seus grupos na fase de exploração da tarefa.

Professora: Consideremos então a função $g(x)=1/(ax+b)$ e vamos retomar novamente a discussão que foi iniciada na última aula. Na última aula a parte final da discussão foi muito apressada, pois tivemos pouco tempo... E que nos interessa

agora é encontrar uma generalização para a família de funções do tipo da $g(x)$. Primeiro, quando vos foi proposta a tarefa 1 como é que começaram a resolver esta tarefa?
Dora: Substituímos logo na função $f(x)$, o a e o b...
Professora: Quais foram os primeiros valores que atribuíram a a e a b?
Dora: $a=1$ e $b=1$.
Raul: $a=1$ e $b=0$.

Entretanto a professora escreveu no quadro interactivo as duas conjecturas formuladas por Dora e por Raul. Posteriormente, os alunos recapitularam todas as conjecturas que tinham sido formuladas e testadas na aula anterior por cada um dos grupos.

Da conjectura à prova

Após os constrangimentos iniciais da maioria dos alunos, começaram a tentar mostrar as conjecturas que formularam em grupo e os argumentos que apresentaram de modo a encontrar uma prova para a família de funções proposta.

Aurora: Professora, sabemos que quanto maior é o valor de a, menor é a assimptota.
Professora: Então Aurora vem ao quadro mostrar o teu raciocínio.

Na tentativa de que todos os alunos estivessem atentos à conjectura formulada e aos argumentos apresentados pela Aurora, a professora solicitou que escrevesse o seu raciocínio no quadro interactivo.

Professora: Quando a for maior que zero o que é que acontece? Vocês testaram essa situação?
Luísa: ... a assimptota vai ser menor e aproximando-se cada vez mais do eixo dos xx.
Raul: ... aproxima-se cada vez mais da origem...
Luísa: ...mas depende do b...
Professora: Ouviram, depende do b disse a Luísa... Mais conclusões que podemos tirar?
Célia: Stora, nós provamos isto quando $b=0$.

Enquanto Aurora terminou de escrever a sua conjectura (fig. 8), os restantes alunos tentaram testar o resultado obtido alterando os valores dos parâmetros na calculadora gráfica.

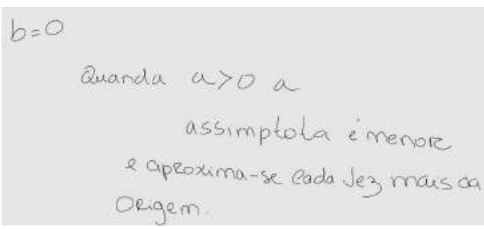


Figura 8. *Flipchart* B da tarefa 1 escrito por Aurora

A conjectura formulada por Aurora não era totalmente verdadeira, no entanto, os alunos ainda não tinham testado a conjectura de forma a verificarem que era necessário reformularem-na de modo a ser verdadeira, independentemente dos valores dos parâmetros da família de funções em estudo.

Maria: Quando a é menor é ao contrário?
Professora: Agora, a Maria disse que quando é menor é ao contrário...
Aurora: Não...
Professora: Não porque?
Raul: O gráfico da função fica no 2º e no 4º quadrante, mas aproxima-se também cada vez mais do eixo dos xx ...
Professora: Será que o que a Aurora escreveu no quadro é totalmente verdade?
Raul: Não.
Professora: ... porque...

Neste momento da discussão, os alunos não conseguiram provar a conjectura formulada por Aurora. Verificou-se que, apesar de a professora os questionar sobre a validade da conjectura formulada, os grupos não conseguiram provar a sua veracidade e apresentaram, de imediato, outras conclusões que obtiveram na investigação, deixando para trás o que foi afirmado. As conclusões que são apresentadas de seguida referem-se à formulação do conceito de assimptota que aparece pela primeira vez no 11.º ano.

Elisa: As assimptotas para $b=0$ são sempre as mesmas...
Professora: Quais...
Elisa: $x=0$ e $y=0$.
Professora: Mais conclusões ...
Elisa: Professora, nós verificamos que relativamente à função inicial, $f(x)=ax+b$ que o zero desta função representa a assimptota da função inversa.
Alguns alunos: Como?
Professora: Podes reformular novamente a tua conjectura. Alguns alunos estavam a pensar, mas depreendo que não entenderam. Ouçam o que a Elisa disse...
Elisa: Relativamente à função $f(x)$ inicial, o zero dessa função corresponde à assimptota da função inversa $g(x)$.
Professora: Vens explicar aqui ao quadro?
Alguns alunos: É melhor...

Como em situações anteriores a professora sugeriu a Elisa para no quadro interactivo escrever a conjectura formulada pelo seu grupo de trabalho. Elisa escreveu então um exemplo (fig. 9), dos vários considerados pelo grupo, a partir do qual formulou a conjectura que o zero da função f era a assimptota da função g. Esta conjectura da Elisa foi ao encontro de um dos objectivos da tarefa, o de efectuar o estudo da função inversa da função afim f.

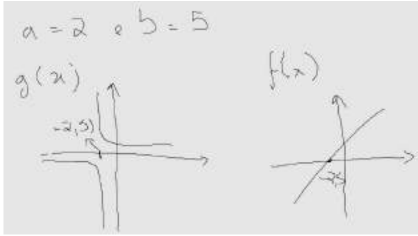


Figura 9. *Flipchart* C da tarefa 1 escrito por Elisa

A aluna, a partir do exemplo dado e confirmando o facto de terem considerado mais exemplos para testarem a validade da sua conjectura, verificaram que esta era válida para a família de funções em estudo.

> *Elisa:* A assimptota da função $g(x)$ é $-2,5$ e...
> *Professora:* Sim e...
> *Elisa:* ...e agora na $f(x)$ que é a nossa função inicial. Vimos que o zero desta função é também $-2,5$.
> *Professora:* Verificaram para mais casos?
> *Elisa:* Sim, e obtivemos sempre a mesma conclusão...
> *Professora:* O que é que vocês acham, turma?
> *Célia:* Nós também chegamos a essa conclusão.

Em nenhuma das conjecturas formuladas anteriormente os alunos sentiram a necessidade de provar a sua validade. A turma aceitou de imediato como verdadeiras pois tinham chegado às mesmas conclusões aquando do desenvolvimento dos trabalhos em grupo.

Entretanto, com o intuito de provar que a equação da assimptota vertical da função g era $x = -b/a$, Raul pediu à professora para escrever um dos exemplos considerado pelo seu grupo, que deu origem a essa conclusão. Registou no quadro interactivo o exemplo e os cálculos efectuados para determinar a assimptota vertical (fig. 10).

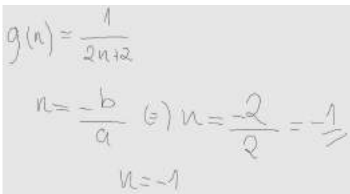


Figura 10. *Flipchart* D da tarefa 1 escrito por Raul

De seguida a professora sugeriu a Raul para explicar o que havia escrito no quadro interactivo.

> *Professora:* Vamos lá então ouvir o Raul...
> *Raul:* Para descobrir a assimptota vertical nós encontramos através dos valores de a e de b...
> *Célia:* Para $a = 2$ e $b = 2$ tem-se $2x + 2$ tem de ser diferente de 0 ...
> *Raul:* Nós chegamos à conclusão que a assimptota vertical podia ser de equação... $x = -b/a$ ... que neste caso...

Professora: Que acham? Concordam? O Raul disse que se fizerem $x = -b/a$, chegam à conclusão que ...
Raul: ...a assimptota seria $x = -1$...
Professora: Neste caso...
Aurora: o domínio da função g é $IR \setminus \{-b/a\}$...
Professora: Ouçam a Aurora... Vai lá então ao quadro mostrar...

Nos últimos minutos da primeira aula dedicada à discussão na turma, Aurora dirigiu-se ao quadro interactivo, por sugestão da professora, e escreveu uma das conclusões do seu grupo para a família de funções consideradas na primeira tarefa (fig. 11). Essa conclusão referia que o zero da função afim é a assimptota da função inversa e provaram essa conjectura concluindo também que o domínio da função inversa é o conjunto dos números reais excepto a sua assimptota.

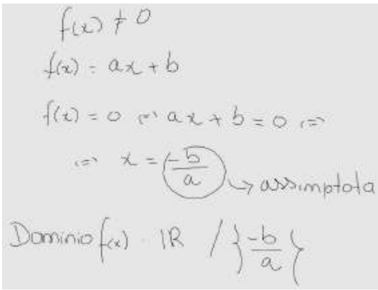


Figura 11. *Flipchart* E da tarefa 1 escrito por Aurora

Raul relativamente ao que referiu Aurora acrescentou uma outra conclusão relativamente à equação da assimptota horizontal e a sua relação com o contradomínio, para qualquer função pertencente à família de funções g.

Raul: Nós concluímos que a assimptota horizontal é sempre $y = 0$.
Professora: A assimptota horizontal é sempre $y = 0$. E esse facto tem alguma relação com...
Raul: ...a função e com o contradomínio...
Professora: ...com o contradomínio...
Elisa: Sim. O contradomínio é IR excepto o zero ...
Raul: ... o zero...
Professora: O contradomínio é então IR excepto o zero e...
Elisa: ...e o domínio é IR excepto a assimptota vertical.
Professora: Vejam, foi o que acabou de escrever a Aurora... Exactamente a assimptota vertical tem de equação $x = -b/a$ e o domínio é $IR \setminus \{-b/a\}$.
Raul: E para chegarmos à outra assimptota ... à horizontal... $y = 0$ temos que o contradomínio é $IR \setminus \{0\}$.

De seguida, Vitória interveio na discussão, referindo uma das conjecturas formulada e testada pelo seu grupo.

Vitória: Stora, nós também descobrimos que quando o valor de a é positivo temos a monotonia decrescente e quando a é negativo temos a monotonia crescente. Quer dizer, a função muda de quadrantes...
Professora: ... e isso quer dizer que num caso fica...
Dora: ... ficam simétricas.
Professora: Sim, ficam simétricas relativamente à origem. Concordam?
Alunos: Sim.
(...)
Vitória: Professora, nós concluímos a monotonia considerando sempre $b=1$.
Célia: Nós consideramos o $b=0$ e tiramos as mesmas conclusões.
Professora: Então o b tem que ser sempre igual a 1?
Alunos: Não.
Vitória: Pode ser zero...
Raul: A monotonia depende só do valor do parâmetro a...
Professora: Se a for positivo...
Raul: ...a função é monótona decrescente e se a for negativo a função é monótona crescente. O valor de b pode ser qualquer.
Professora: Muito bem... quer dizer que podemos alterar o valor do parâmetro b...
Vitória: A monotonia só depende do sinal do parâmetro a.

A professora, entretanto propôs a Vitória para escrever no quadro interactivo (fig. 12), a sua conjectura.

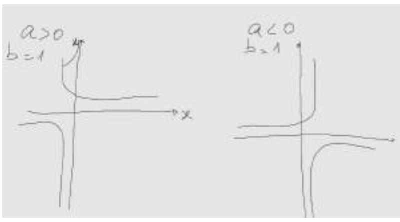


Figura 12. *Flipchart* F da tarefa 1 escrito por Vitória

Os alunos dos diferentes grupos, para chegarem à conclusão relativamente à monotonia para as funções pertencentes à família dada, efectuaram vários exemplos para conseguirem verificar a sua veracidade. Relativamente ao estudo da paridade da família de funções g, Elisa referiu que o seu grupo verificou que não é impar nem é impar, independentemente dos valores atribuídos aos parâmetros a e b. No entanto, os alunos acrescentaram à definição, que a função g é impar em relação à assimptota vertical. Referiram também que verificaram que a única função verdadeiramente impar, devido a ser simétrica em relação à origem, era uma função do tipo $f(x)=1/ax$.

Elisa: Quanto à paridade a função não é par porque não é simétrica em relação ao eixo dos yy e nem é impar porque não é simétrica em relação à origem. Mas a função é impar em relação à assimptota vertical...
Professora: Sim. E naquele primeiro caso $f(x)=1/x$, a conclusão relativamente à paridade é a mesma? A função tem o mesmo comportamento?
Raul: Não, ela é impar. Mas também é impar em relação à assimptota...

Professora: Digamos que todos os casos em que $b=0$ dão origem a funções impares...
Raul: Porque são simétricas em relação à origem.
Professora: Esses casos são os únicos em que a função é impar...
Raul: Porque a origem também é a assimptota, ou seja, $x=0$ e $y=0$.
Professora: Exactamente...
Aurora: Então esta função é o quê, é impar?
Professora: Esta função que está no quadro não é par nem é impar. A inicial $f(x)=1/x$ é que é impar.
Aurora: Ah, O.K.
Professora: Como acabou de dizer o Raul a função inicial é impar porque a assimptota é zero, quer a horizontal quer a vertical.
Alexandra: Então quer dizer que para as funções serem ímpares tem que ser simétricas em relação à origem.
Raul: Sim.
Fausto: Só podemos dizer que são ímpares quando são simétricas em relação à origem.

Os argumentos apresentados pelos alunos de forma a confirmarem as suas conjecturas, neste momento da aula estavam a ser mais frequentes e mais ricos, no entanto, aproximava-se o final da aula e a professora tinha que dar por terminada a discussão. Apesar da falta de tempo, uma aluna ainda referiu que o seu grupo verificou que caso os valores dos parâmetros a e b, fossem simultaneamente iguais a zero então a função resultante da substituição era impossível.

Célia: Há mais uma conclusão, quando a e b são iguais a zero a função é impossível.
Professora: Vem então ao quadro Célia registar essa tua conclusão.

A professora sugeriu a Célia para registar a conclusão no quadro interactivo (fig. 13), para que todos os colegas pudessem visualizar o que referiu e verificarem como é que procedeu à prova da conjectura que o seu grupo formulou.

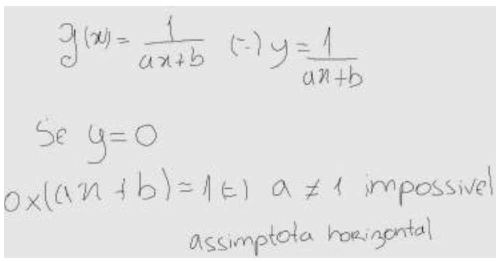


Figura 13. *Flipchart* G da tarefa 1 escrito por Célia

De seguida, e como forma de efectuar uma súmula, a professora decidiu escrever no quadro interactivo (fig. 14), com a ajuda dos alunos, o que tinha sido discutido nesta primeira aula dedicada à discussão na turma.

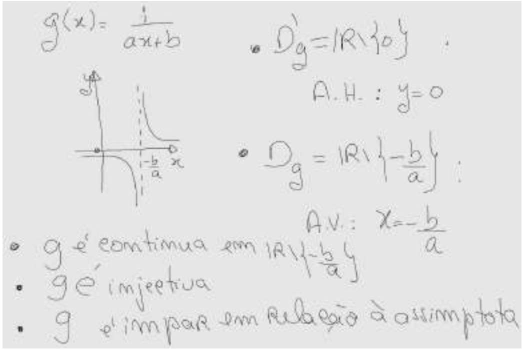


Figura 14. *Flipchart* H da tarefa 1 escrito pela professora

Posteriormente, Raul lembrou-se de acrescentar a todas as conclusões consideradas anteriormente, o sinal da família de funções g.

> *Professora:* Ouçam o que disse o Raul. Em relação à função que desenhei, a função é positiva se o gráfico da função está...
> *Raul:* ...acima do eixo dos xx e negativa quando o gráfico da função está abaixo do eixo dos xx.
> *Célia:* De menos infinito até à assimptota a função é negativa e da assimptota para mais infinito a função é positiva.
> *Professora:* Então, neste caso de $\left]-\infty,-b/a\right[$ a função é negativa e de $\left]-b/a,+\infty\right[$ a função é positiva.

Devido a ter sido dado pouco tempo para o desenvolvimento da discussão na turma a professora investigadora prolongou-a para o início da aula seguinte. Nesta segunda aula, relativamente a uma das conjecturas sobre a influência da alteração do parâmetro b no comportamento do gráfico da função g, Célia formulou-a de forma mais rigorosa e coerente da que tinha sido proferida anteriormente por Aurora.

> *Célia:* Ao aumentarmos os valores de b para ver qual o deslocamento da função e descobrimos que quando aumentávamos os valores de b ela deslocava-se para a esquerda.
> *Professora:* ...quando aumentamos o valor do parâmetro b a função desloca-se da direita para a esquerda.
> *Célia:* Em relação ao eixo dos xx.

Todas as conjecturas e argumentos apresentados pelos alunos para as validar, durante esta segunda aula foram iguais às formuladas e testadas na aula anterior. No entanto, esta discussão prolongou-se pelos primeiros quarenta e cinco minutos pois a intenção da professora foi o de verificar se todos os novos conceitos que foram proferidos durante a aula anterior foram entendidos por todos os elementos da turma. Este procedimento só foi adoptado na primeira tarefa visto ter constituído, para os alunos, a introdução a um tema novo do programa do 11.º ano.

A calculadora gráfica

Durante o desenvolvimento da discussão em grande grupo a calculadora gráfica, previamente instalada no quadro interactivo, foi sistematicamente utilizada com o objectivo de testar a veracidade das conjecturas formuladas pelos alunos. Este instrumento desempenhou também um papel primordial quando os alunos sentiam a necessidade de provar os resultados obtidos para qualquer função pertencente à família dada na primeira tarefa.

Contributos

Os contributos evidenciados durante o desenvolvimento da tarefa 1 foram registados no quadro interactivo e mostraram a importância da utilização da calculadora gráfica na investigação de tarefas, em que o objectivo é a realização de um estudo sobre a influência da alteração dos valores dos parâmetros a e b, no gráfico de uma função afim.

Raul teve uma participação mais activa na introdução das expressões algébricas das funções na calculadora gráfica, dado que se encontrava muito perto do quadro interactivo, nesta primeira tarefa. É evidente o contributo da utilização deste instrumento na formulação e reformulação de conjecturas, assim como na tentativa de prova das mesmas.

Quando a determinada altura da discussão se pretendia estudar a função $f(x)=1/x$, Raul dirigiu-se ao quadro interactivo, ligou a calculadora gráfica e seleccionou o menu *graph* (fig. 15), para obter a representação gráfica da função.

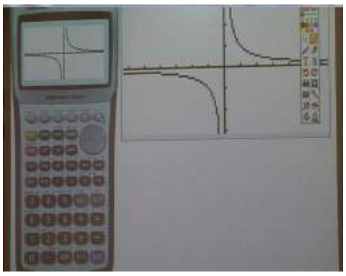


Figura 15. Imagem A da calculadora gráfica na tarefa 1

A partir da visualização do respectivo gráfico, os alunos começaram a ser mais interventivos nas suas participações e argumentações.

> *Professora:* Em relação a esta função que conclusões é que tiraram? O Raul disse que começou com a função mais simples que foi obtida considerando o $a=1$ e $b=0$ ... Todos os grupos pensaram assim? Todos vocês pensaram desta forma?
> *Alguns alunos:* Sim...
> *Elisa:* Nós vimos com outros valores...
> *Professora:* Agora pergunto-vos, que conclusões tiraram com esta função?
> *Duarte:* É impar...

Professora: Esta função é impar... mais...
Raul: É injectiva... não tem zeros...
Professora: Não tem zeros. E porque é que não tem zeros?
Fausto: Nunca chega a cruzar o eixo dos xx ...
Professora: Mais...
Raul: $x=0$ é uma assimptota e $y=0$ é outra assimptota...
Professora: Sim...
Célia: ...o domínio e o contradomínio é $IR\setminus\{0\}$.
Professora: O domínio e o contradomínio é $IR\setminus\{0\}$. Toda a gente está de acordo?
Todos: Sim...
Professora: Mais conclusões que tiraram relativamente à primeira função se toda a gente chegou à mesma...
Raul: É uma hipérbole...
Professora: A curva é uma hipérbole...
Alexandra: É contínua excepto em zero.

Noutro momento da discussão, em que se instalou a dúvida em alguns alunos relativamente ao facto da função $f(x)=1/x$ ser ou não injectiva, novamente se recorreu à calculadora gráfica para visualizar o gráfico da função. Nesta situação, tornou-se também importante recorrer ao *menu table* (fig. 16), para constatar com maior rigor se existiam dois objectos diferentes para os quais as imagens eram iguais.

Figura 16. Imagem B da calculadora gráfica na tarefa 1

Uma das dificuldades dos alunos em entender se a função era injectiva ou não, era o facto de que na visualização do gráfico da função "parecia" que a função era constante a partir de determinado valor da incógnita x. Para verificar se a função era constante ou não, os alunos sugeriram a utilização do *menu table* da calculadora gráfica para testarem a sua conjectura.

Professora: Como é que vocês conseguem ver se ela é constante ou não?
Alunos: Vamos à máquina...
Elisa: Vamos à tabela...

Raul após recorrer ao *menu table* da função pretendida, começou com o cursor a verificar na tabela os diferentes valores de x e os respectivos valores de y.

Professora: Vão então à tabela. Raul desce com o cursor sobre os valores de x para verificar os respectivos valores de y... Acham que a função toma valores iguais para y? Que existem valores de x com a mesma imagem?

Alunos: Não.
Professora: E o que é que será que representa aquele erro que aparece para o valor da incógnita y?
Alunos: A assimptota.
Professora: E aquela assimptota é a assimptota horizontal ou a vertical?
Alunos: A assimptota vertical ... $x=0$ e $y=0$ é a assimptota vertical.

A calculadora gráfica contribuiu também para a determinação da maior parte das assimptotas verticais pois os alunos ao utilizarem o *menu table* só tinham de verificar qual o valor de x para o qual o valor de y dava *error* (fig. 17).

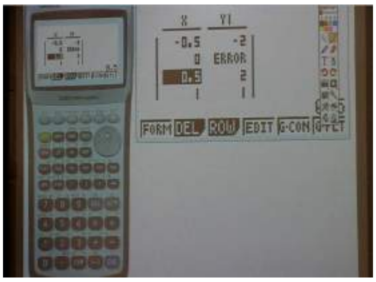


Figura 17. Imagem C da calculadora gráfica na tarefa 1

Assim, podemos concluir que foram inúmeros os contributos da utilização da calculadora gráfica na discussão na turma, nomeadamente, proporcionou a formulação e teste de conjecturas e caso não fossem válidas a reformulação das mesmas, e desenvolveu também nos alunos a necessidade de validar os argumentos apresentados através da prova.

Dificuldades

As dificuldades durante a discussão em grande grupo não foram explicitadas pois os alunos já tinham colmatado as suas lacunas aquando do trabalho realizado em pequeno grupo. No entanto, há a realçar uma situação em que a calculadora gráfica no desenvolvimento da discussão em turma causou algumas dúvidas, nomeadamente na interpretação do gráfico de uma função em particular. Este caso refere-se ao momento em que os alunos ao visualizarem o gráfico da função $g(x)=1/x$ pretendiam estudar se a função era injectiva, constatando que o gráfico da função era constante quando o valor de x era muito grande ou então muito pequeno (fig. 16). Neste caso, os alunos sentiram alguma dificuldade em chegar a uma conclusão, por um lado porque alguns não se lembravam da definição de função injectiva, por outro, porque não se lembraram de recorrer ao *trace* para constatar quais os valores de x e respectivos valores de y, conforme o cursor percorresse o gráfico da função.

5.1.3. Relatório e reflexão

Nesta tarefa de investigação como se tratava da primeira de uma sequência, os alunos desenvolveram os seus relatórios com alguma dificuldade pois na maioria dos casos não argumentavam relativamente aos resultados obtidos, não referiam as conjecturas abandonadas e não reflectiam sobre a actividade desenvolvida. Com vista a colmatar estas falhas nos relatórios, a professora propôs aos alunos uma reformulação dos mesmos. Os resultados que a seguir se apresentam são relativos, na maioria dos casos, aos segundos relatórios em que os alunos justificam os processos de raciocínio desenvolvidos na investigação.

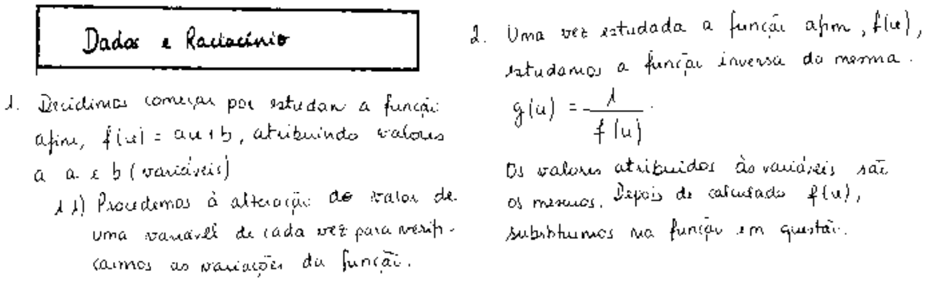
A argumentação matemática

Neste primeiro relatório, os alunos começaram a entender qual era o objectivo principal na feitura dos mesmos. Constataram que deveriam registar os seus argumentos relativamente às conjecturas seguidas e também às abandonadas. A partir da realização destes primeiros relatórios os alunos começaram a aperceber que para explicarem e justificarem o seu raciocínio, deveriam argumentar sobre todo o processo seguido durante a investigação.

Formulação e teste de conjecturas

Os alunos começaram os seus relatórios de duas maneiras distintas. Uns começaram por comparar as duas funções dadas no enunciado da tarefa, a função afim e a sua inversa, atribuindo valores aleatórios aos parâmetros a e b. Outros alunos começaram de imediato a efectuar o estudo da função inversa atribuindo também valores aleatórios às incógnitas a e b.

Julieta, do *grupo 2* começou o seu relatório (fig. 18), explicando qual foi o processo de raciocínio desenvolvido pelo seu grupo.


Dados e Raciocínio

1. Decidimos começar por estudar a função afim, $f(x) = ax + b$, atribuindo valores a a e b (variáveis)
   1.1) Procedemos à alteração do valor de uma variável de cada vez para verificarmos as variações da função.

2. Uma vez estudada a função afim, $f(x)$, estudamos a função inversa da mesma.
$g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
Os valores atribuídos às variáveis são os mesmos. Depois de calculado $f(x)$, substituímos na função em questão.

Figura 18. Excerto A do relatório da tarefa 1 de Julieta

Entretanto a aluna apresenta sob a forma de tabela (fig. 19), uma comparação entre a função f e a respectiva inversa g.

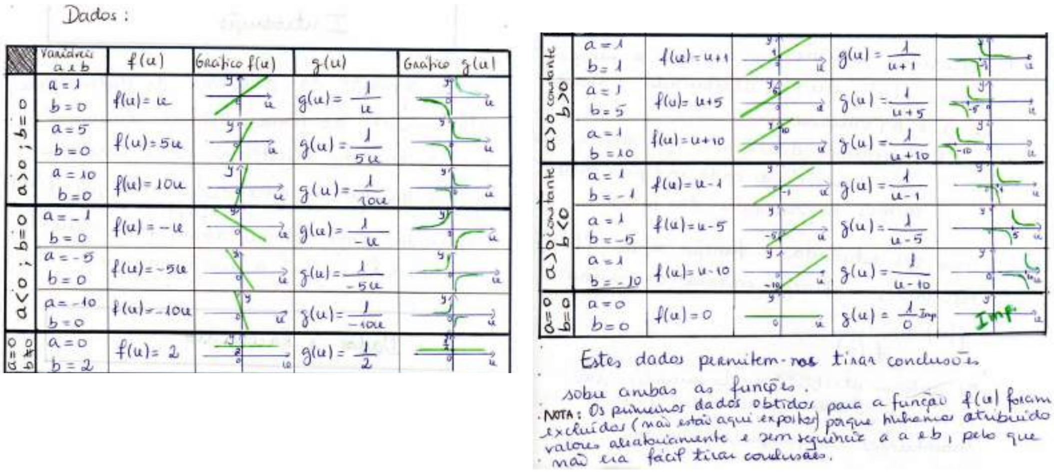
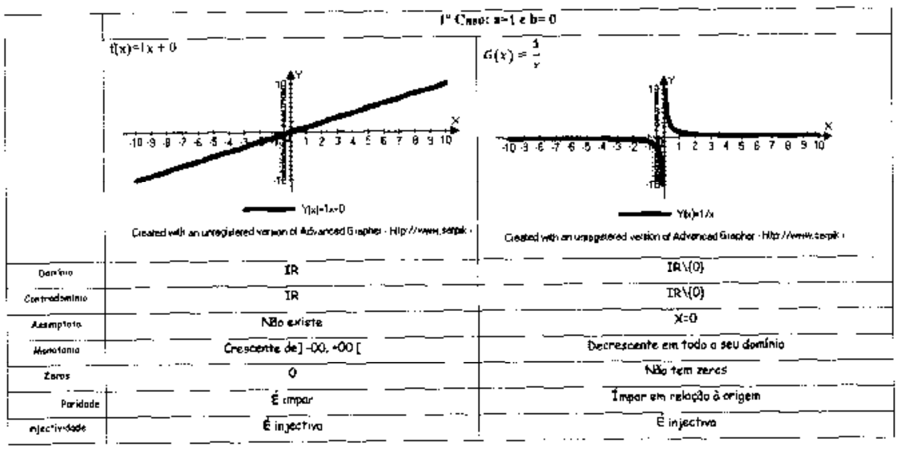


Figura 19. Excerto B do relatório da tarefa 1 de Julieta

Note-se que no quadro considerado por Julieta de forma a sintetizar as conjecturas formuladas pelo seu grupo a aluna referiu que inicialmente atribuíram valores aleatórios às incógnitas a e b. Posteriormente, as alunas organizaram os resultados obtidos e impuseram condições aos valores das incógnitas de forma a obterem algumas conclusões da tarefa.

Uma outra aluna, Célia, do *grupo 3*, efectuou um raciocínio muito semelhante ao de Julieta (fig. 20), formulando várias conjecturas iniciais de forma a poder chegar a algumas conclusões relativamente ao domínio, contradomínio, assimptotas, monotonia, paridade e injectividade.



Domínio	IR	IR\{0}
Contradomínio	IR	IR\{0}
Assimptota	Não existe	X=0
Monotonia	Crescente de]-∞, +∞[	Decrescente em todo o seu domínio
Zeros	0	Não tem zeros
Paridade	É ímpar	Ímpar em relação à origem
Injectividade	É injectiva	É injectiva

Figura 20. Excerto A do relatório da tarefa 1 de Célia

Esta aluna ao longo do seu relatório realizou, para além deste primeiro caso, o estudo de vários, nomeadamente 2.º caso: $a=1$ e $b=1$; 3.º caso: $a=1$ e $b=2$; 4.º caso: $a=1$ e $b=3$; 5.º caso: $a=1$ e $b=4$; 6.º caso: $a=1$ e $b=0{,}25$; 7.º caso: $a=2$ e $b=0$; e 8.º caso: $a=2$. Relativamente a todos estes casos considerados, em que para cada um deles efectuaram um estudo semelhante ao do primeiro, a aluna formulou várias conjecturas e compôs um conjunto de argumentos para justificar o porquê de terem escolhido exactamente estas hipóteses (fig. 21).

Conjecturas seguidas e abandonadas:

1º caso:

Consideramos este 1º caso como se fosse a nossa função original escolhendo os valores mais simples, e também uma função em que não havia cruzamentos com o eixo dos yy. Esta é a única função que é impar por definição, ou seja, em relação á origem.

2º ao 5ºcaso:

Nas próximas condições (do 2º ao 5º caso) aumentamos o valor de b para verificar qual o deslocamento da função.

Com as várias experiências efectuadas verificamos que a função se desloca no sentido da direita para a esquerda, verifica se também o deslocamento da assimptota, dependem uma da outra e o valor de cruzamento da função f com o eixo dos yy também vai diminuindo.

6º Caso:

A condição seguinte foi seleccionada porque tínhamos visualizado nas experiências anteriores que quando o b era por ex. 4 a coordenada de cruzamento no eixo dos yy era $\frac{1}{4}$, assim quisemos verificar se quando o b era 0,25 o cruzamento no eixo dos yy era 4.

7º e 8º Caso:

Nestes dois últimos casos decidimos variar o valor de a, aqui ao mesmo tempo também mostra a variação do valor de b. mas com tentativas efectuadas na maquina sabemos que ao aumentar o valor de a a função desloca se no sentido da esquerda para a direita.

- Uma falha foi ter exagerado na atribuição de valores ao b, apenas com dois ou três já conseguíamos chegar a conclusão desejada.
- Para calcular a assimptota pensamos que o denominador tinha que ser diferente de 0, e assim foi só resolver a equação. Também com a máquina calculadora, na tabela verificávamos quando o valor de y dá error.

Figura 21. Excerto B do relatório da tarefa 1 de Célia

Célia considerou que não deveria ter considerado tantos exemplos em que variava o valor do parâmetro b, visto que com menos casos conseguia chegar a uma conclusão relativamente às conjecturas formuladas. Note-se que, esta aluna não estudou o comportamento da família de funções para casos em que os valores negativos, de a e/ou de b. A professora investigadora chamou a atenção este facto, tendo a aluna posteriormente associou ao seu relatório mais quatro casos, em que as variáveis eram ambas negativas ou apenas uma delas. Entretanto a aluna referiu que o facto de não ter atribuído valores negativos às varáveis deveu-se a um esquecimento na elaboração do seu relatório.

Uma outra aluna, Rafaela, do *grupo 4*, definiu inicialmente a forma como estava estruturado o seu relatório (fig. 22).

1. Tentámos definir função inversa e função afim.
2. Escolhemos aleatóriamente valores para a e b.
3. Substituímos os valores de a e b nas funções $f(x)$ e $g(x)$.
4. Fizemos a representação gráfica das respectivas funções.
5. Registámos todas as informações que obtivemos da representação gráfica, que estão apresentadas nas tabelas abaixo.
6. Tirámos as conclusões dos nossos registos.

Figura 22. Excerto do relatório da tarefa 1 de Rafaela

De imediato iniciou a explicação da forma como o seu grupo efectuou a investigação, referindo que atribuíram valores aleatórios às varáveis, na função afim e na sua inversa. Note-se que a Rafaela considerou poucos exemplos, mas cada um deles considera valores positivos e negativos para os parâmetros a e b. Para cada caso a aluna apresentou os argumentos que fizeram com que o seu grupo considerasse cada um destes casos.

Como foi referido anteriormente, outros alunos começaram a investigação desta tarefa com o estudo da função inversa, $g(x)=1/(ax+b)$ e, posteriormente, com a formulação da conjectura em que o zero da função f era a assimptota vertical da função g. Este caso é evidenciado no relatório de Júlia (fig. 23), do *grupo 1*, em que a aluna atribuiu diferentes valores aos parâmetros a e b, e ao efectuar a comparação com um exemplo de função afim verificou que a conjectura formulada era válida para qualquer função da mesma família.

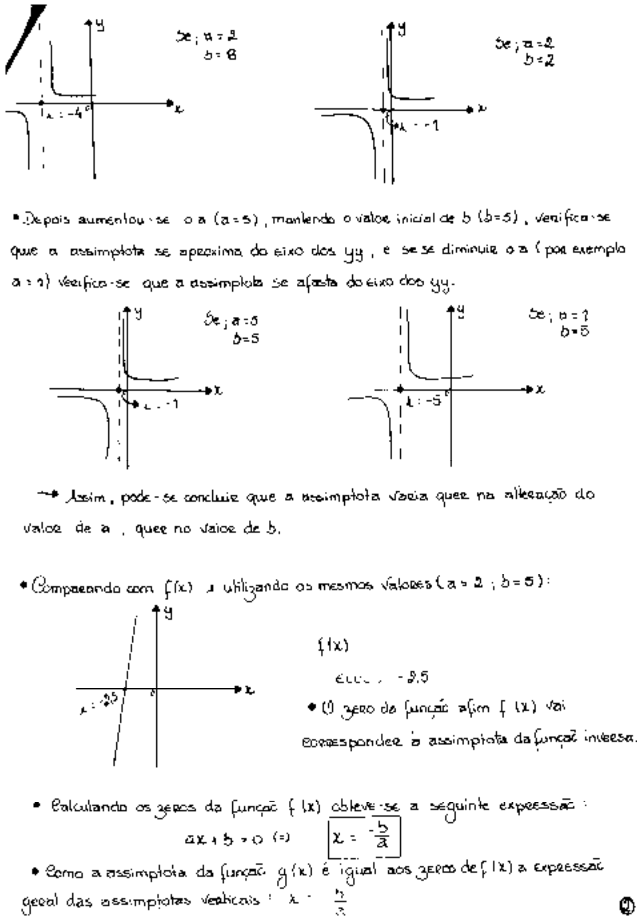


Figura 23. Excerto A do relatório da tarefa 1 de Júlia

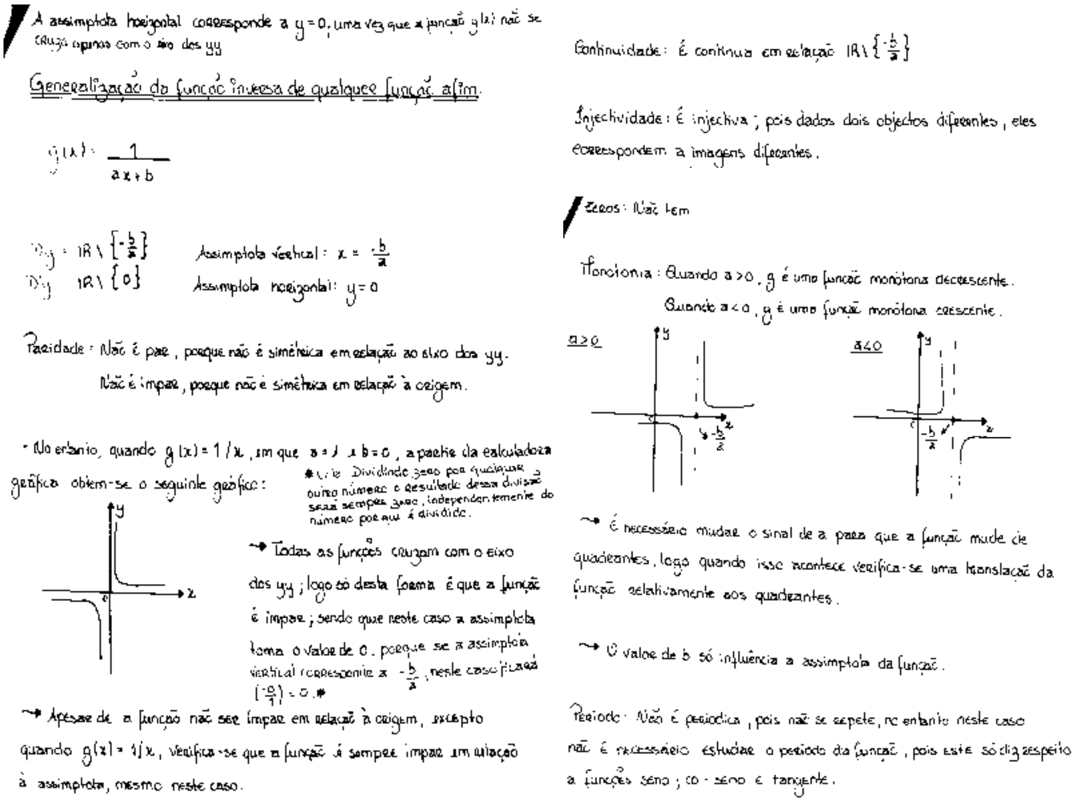
Após a atribuição de valores aleatórios às incógnitas. os alunos foram formulando as suas conjecturas, argumentando quanto à validade das mesmas. Na tentativa de provarem que os resultados obtidos eram válidos para a família de funções em estudo, os alunos passaram à generalização dos mesmos.

Da conjectura à prova

Os alunos tentaram provar as suas conjecturas, no entanto, na maior parte dos casos obtiveram apenas uma generalização para a família de funções dada na tarefa 1. O teste e prova das conjecturas foi na maioria dos casos, realizada através da confirmação dos resultados na calculadora gráfica.

Júlia, do *grupo 1*, no final do relatório (fig.24), a partir dos resultados obtidos por experimentação efectuou uma generalização para a função inversa de qualquer função afim.

Esta aluna desenvolveu um estudo da família de funções dada na tarefa, quanto ao domínio, contradomínio, assimptotas, paridade, continuidade, injectividade, zeros e monotonia.



A assimptota horizontal corresponde a $y=0$, uma vez que a função $g(x)$ não se cruza apenas com o eixo dos yy

Generalização da função inversa de qualquer função afim.

$g(x) = \frac{1}{ax+b}$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$ Assimptota vertical: $x = -\frac{b}{a}$

$D'_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Assimptota horizontal: $y = 0$

Paridade: Não é par, porque não é simétrica em relação ao eixo dos yy.

Não é ímpar, porque não é simétrica em relação à origem.

- No entanto, quando $g(x) = 1/x$, em que $a = 1$ e $b = 0$, a partir da calculadora gráfica obtem-se o seguinte gráfico:

* Dividindo zero por qualquer outro número o resultado dessa divisão será sempre zero, independentemente do número por que é dividido.

→ Todas as funções cruzam com o eixo dos yy; logo só desta forma é que a função é ímpar; sendo que neste caso a assimptota toma o valor de 0, porque se a assimptota vertical corresponde a $-\frac{b}{a}$, neste caso ficará $(-\frac{0}{1}) = 0$. *

→ Apesar de a função não ser ímpar em relação à origem, excepto quando $g(x) = 1/x$, verifica-se que a função é sempre ímpar em relação à assimptota, mesmo neste caso.

Continuidade: É contínua em relação $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$

Injectividade: É injectiva; pois dados dois objectos diferentes, eles correspondem a imagens diferentes.

Zeros: Não tem

Monotonia: Quando $a > 0$, g é uma função monótona decrescente.

Quando $a < 0$, g é uma função monótona crescente.

$a > 0$ $a < 0$

→ É necessário mudar o sinal de a para que a função mude de quadrantes, logo quando isso acontece verifica-se uma translação da função relativamente aos quadrantes.

→ O valor de b só influência a assimptota da função.

Período: Não é periódica, pois não se repete, no entanto neste caso não é necessário estudar o período da função, pois este só diz respeito a funções seno, co-seno e tangente.

Figura 24. Excerto B do relatório da tarefa 1 de Júlia

Este tipo de resultados obtidos por Júlia foi análogo aos registados nos relatórios dos restantes elementos da turma. Célia apresentou um quadro síntese (fig. 25), das conclusões obtidas na tarefa. Note-se que a aluna considerou vários exemplos e a partir deles verificou que os resultados obtidos eram válidos para a família de funções da tarefa.

Consoante a e b, mas considerando a≠0	
	$g(x) = \frac{1}{ax+b}$
Domínio	IR \ {-b/a}
Contradomínio	IR \ {0}
Assimptota	
Horizontal	y = 0
Vertical	x = -b/a
Monotonia	Quando a>0 é monótona decrescente Quando a<0 é monótona crescente
Zeros	Não tem zeros
Paridade	É ímpar em relação à assimptota
Injectividade	É injectiva
Continuidade	Contínua excepto na assimptota

Figura 25. Excerto C do relatório da tarefa 1 de Célia

Paulo, após ter efectuado um estudo exaustivo de vários tipos de funções mediante a alteração dos valores dos parâmetros (fig. 26), concluiu os resultados obtidos para a família de funções $g(x) = 1/(ax+b)$.

Conclusões

- Os parâmetros a e b não podem ser simultaneamente iguais a zero
- Quando a é igual a zero a função f e a função g são iguais (iguais a zero)
- A função g é uma hipérbole.
- A assimptota horizontal é sempre y=0
- A assimptota vertical é dada por: $x = \frac{-n}{a}$
- O domínio é igual a: $D_g = \left\{x \in \mathbb{R}: x \neq \frac{b}{a}\right\} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{-b}{a}\}$
- O contra-domínio é igual a: $D'_g = \mathbb{R} \backslash \{0\}$
- A função g é injectiva
- A função g é impar quando o parâmetro b e igual a zero, ou seja quando a sua assimptota vertical é x = 0
- Podemos dizer, para melhor compreensão da função que, a função g é impar em relação à sua assimptota vertical, ou seja é impar em relação a $x = \frac{-b}{a}$
- A função g é crescente em todo o seu domínio, ou seja continua excepto em $\frac{-c}{a}$.
- Quando a>0 a função é decrescente excepto na assimptota vertical $(x = \frac{-b}{a})$
- Quando a<0 a função é crescente excepto na assimptota vertical $(x = \frac{-b}{a})$
- Quando b>0 e a>0 a função g predomina nos 2º e 3ºquadrantes, a assimptota vertical é negativa
- Quando b>o e a<0 a função g predonima 1º e 4º quadrantes, a assimptota vertical é positiva
- Quando b<0 e a>0 a função g predomina nos 1º e 4º quadrantes, a assimptota vertical é positiva
- Quando b<o e a<0 a função predomina nos 2º e 3ºquadrantes, a assimptota vertical é negativa
- A função g não possui zeros
- A função é continua excepto na sua assimptota vertical $(x = -\frac{b}{a})$
- O valor de y quando x=0 é o mesmo nas duas funções

Figura 26. Excerto A do relatório da tarefa 1 de Raul

Como se verifica pela análise dos relatórios, os alunos tentaram provar os resultados para a família de funções da tarefa, no entanto a prova efectuada aproxima-se mais de uma generalização dos exemplos estudados. No final dos relatórios, os alunos realizaram as suas reflexões sobre o desenvolvimento dos trabalhos de grupo, desta primeira tarefa.

Neste trabalho, torna-se importante realçar a importância do trabalho de grupo, na medida que este potenciou o raciocínio e o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente, dos alunos da turma em estudo. Este facto é constantemente evidenciado pelos alunos. Por exemplo, Júlia salientou a importância da cooperação e da troca de ideias e do desenvolvimento de raciocínios entre os elementos do grupo (fig. 27).

Durante esta actividade houve cooperação entre o grupo, cada um expôs os seus raciocínios claramente, desse modo a nossa troca de ideias relativamente à tarefa foi organizada de forma a que todos estivessem de acordo com as conclusões tiradas.

Figura 27. Excerto da reflexão sobre a tarefa 1 de Júlia

Elisa considerou também que a tarefa 1 foi muito interessante e acessível de investigar pois todos os seus elementos entenderam qual era o objectivo que se pretendia atingir na sua exploração. Salienta também o entusiasmo de todos os elementos do grupo na realização da investigação e refere que o facto de ter sido realizada em grupo, cada "elemento completava as ideias dos outros colegas" (reflexão de Elisa). Esta reflexão como a da Júlia torna-se importante analisar pelo facto de corresponderem a duas alunas que não pertenciam a esta turma no ano transacto, logo não tinham tido qualquer experiência relativa a actividades de investigação, em sala de aula.

Dora, na sua reflexão, referiu que as discrepâncias de opiniões entre os elementos do grupo, rapidamente foram superadas e salienta que a tarefa apesar de simples exigia que os alunos desenvolvessem os seus raciocínios (fig. 28).

Ao longo da realização da tarefa, sucederam-se algumas discrepâncias entre os diferentes membros, discrepâncias, que foram superadas. O meu grupo identificou rapidamente algumas conclusões essências para a tarefa, mas houve outras em que tivemos mais dificuldades. A tarefa era, de um modo geral, simples mas bastante complexa, pois exercia algum raciocínio.

Figura 28. Excerto da reflexão sobre a tarefa 1 de Dora

Raul salientou também na sua reflexão, que esta primeira investigação foi "bastante interessante e didáctica" (fig. 29) e, que através da sua exploração os alunos tiveram a possibilidade de aprender vários conceitos sobre as funções racionais.

Esta primeira tarefa foi bastante interessante e didática. Com a realização desta tarefa pudemos aprender variados conceitos e sobretudo aprender sobre este tipo de funções racionais. O grupo trabalhou em conjunto para a correcta realização desta tarefa, a discussão após a realização da mesma foi bastante pertinente e ajudou-nos bastante a entender a função em questão.

Figura 29. Excerto A da reflexão sobre a tarefa 1 de Raul

Uma outra aluna, Célia, referiu que este método de ensino em que as tarefas de investigação são implementadas como forma de o aluno construir o seu próprio conhecimento, faz com que estas sejam tão interessantes como entusiasmantes (fig. 30).

As falhas que cometemos durante o trabalho e também as ideias que foram essenciais para a sua realização seram uma ajuda para as próximos tarefas.

O nosso grupo trabalhou bem, colaboramos uns com os outros, cada um ia dando a sua opinião, e sempre que não percebíamos alguma coisa dita pelo colega ele tentava explicar de forma a compreender. Cada um tirou os seus apontamentos de acordo com as conclusões a que íamos chegando.

Com a finalidade deste trabalho posso concluir que foi uma tarefa bastante interessante, são formas diferentes de aprendizagem que nos entusiasmam pois assim estamos em diálogo com os colegas trocando sempre as nossas ideias e opiniões , tornando se assim uma Matemática ainda mais divertida, que até nem nos damos pelo tempo passar durante a aula.

No final de trabalho em grupo é engraçado a discussão em turma, porque existem opiniões diferentes gerando uma discussão até nos apercebemos quem tem razão. Com essa discussão ate nós mesmos chegamos a conclusões que nunca tínhamos pensado enquanto trabalhávamos em grupo.

Para trabalhos de investigação torna-se mais facilitada a realização em grupo, pois assim existe uma troca de ideias e inter-ajuda com todos e podemos alcançar objectivos que se torna difícil ser alcançado individualmente.

Figura 30. Excerto da reflexão sobre a tarefa 1 de Célia

Esta aluna sublinhou que as falhas de raciocínio cometidas pelo seu grupo no desenvolvimento desta primeira tarefa de investigação, podiam proporcionar uma ajuda para a exploração das seguintes. Na sua reflexão, relativamente à discussão na turma, a aluna referiu que foi importante no que concerne à partilha de diferentes ideias e de opiniões entre todos os seus elementos. Célia salientou também que com os trabalhos de investigação desenvolvidos em grupo, os alunos podem alcançar objectivos que dificilmente eram possíveis de atingir caso fossem desenvolvidos individualmente. Justifica-se, argumentando que nos trabalhos de investigação em grupo desenvolve-se um ambiente de inter-ajuda, em que os alunos partilham ideias e opiniões.

A calculadora gráfica

A calculadora gráfica foi utilizada nesta tarefa desde o inicio da sua exploração, pois os alunos de uma forma automática começaram por atribuir valores aleatórios aos parâmetros a e b com o intuito de tentarem visualizar o comportamento gráfico da função afim f e da sua inversa g.

Contributos

Formam vários os contributos da utilização da calculadora gráfica ao longo desta primeira tarefa de investigação, nomeadamente na visualização e na confirmação dos gráficos da função afim e da sua inversa. Foi a partir da visualização dos gráficos das funções, no *menu graph* e das tabelas de variação da função, no *menu table* que os alunos na sua maioria concluíram e provaram as conclusões obtidas para a família de funções racionais em estudo.

Por exemplo, Raul no seu relatório sistematicamente recorreu à calculadora gráfica para provar os resultados que foi obtendo ao longo da sua investigação (fig. 31).

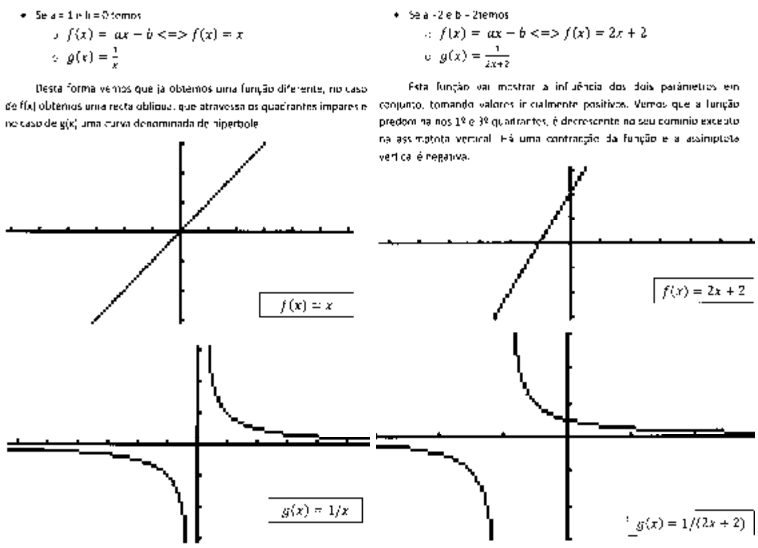


Figura 31. Excerto B do relatório da tarefa 1 de Raul

Outra aluna, Dora, mostrou também, utilizando a calculadora gráfica, qual o raciocínio desenvolvido pelo seu grupo de trabalho (fig. 32). Referiu que, inicialmente, considerou uma função original em que os valores dos parâmetros eram todos iguais a um. Após visualizar o gráfico da função e de ter efectuado o seu estudo relativamente ao domínio, contradomínio, zeros, monotonia e assimptotas, foi alterando os valores do parâmetro b de modo a conseguir formular algumas conjecturas e de também tentar provar utilizando, a calculadora gráfica, como instrumento de visualização e de confirmação.

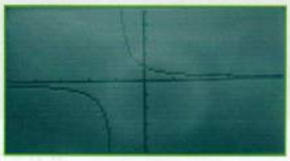
Após a leitura em grupo da tarefa proposta, decidimos que deveríamos começar por dar valores simples a função $f(x) = ax + b$ e substituir na função $g(x) = \frac{1}{ax+b}$, analisa-la e considera-la como a função original.

Começa-mos então por dar valores a a e b, sendo $a = 1$ e $b = 1$.

Sendo, $f(x) = x + 1$

$g(x) = \frac{1}{x+1}$ → <u>FUNÇÃO ORIGINAL</u>

Gráfico:



- $Dg = IR \setminus \{-1\}$
- $D'g = IR \setminus \{0\}$
- Zeros: esta função não apresenta zeros.
- Monotonia: Decrescente nos intervalos: $]-\infty, -1[$ e $]-1, +\infty[$
- Assimptotas:

  $x = -1$, assimptota vertical

  $y = 0$, assimptota horizontal

A partir do momento em que consideramos a função $g(x) = \frac{1}{x+1}$, a função original, continuamos a modificar os valores de a e b, obtendo diferentes funções, que depois iríamos comparar com a função original.

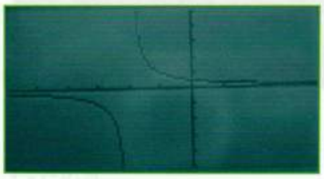
<u>Modificando o b:</u>

Sendo $a = 1$ e $b = 2$

$f(x) = x + 2$

Logo, $g(x) = \frac{1}{x+2}$

Gráfico:



- $Dg = IR \setminus \{-2\}$
- $D'g = IR \setminus \{0\}$
- Zeros: esta função não apresenta zeros.
- Monotonia: Decrescente nos intervalos: $]-\infty, -2[$ e $]-2, +\infty[$
- Assimptotas:

  $x = -2$, assimptota vertical

  $y = 0$, assimptota horizontal

Figura 32. Excerto do relatório da tarefa 1 de Dora

Os alunos no final dos seus relatórios elaboraram uma reflexão sobre a utilização da calculadora gráficas seus contributos e suas dificuldades. Júlia referiu no seu relatório simplesmente que ajudou os alunos no desenvolvimento das suas aprendizagens, diz mesmo: "a calculadora gráfica é muito importante na realização da tarefa, pois melhoramos a nossa aprendizagem através dela" (reflexão de Júlia)

Elisa, do mesmo grupo de Júlia, salientou que a calculadora gráfica constituiu um instrumento fundamental no desenvolvimento das investigações, referindo também que é um "instrumento muito importante e indispensável, principalmente quando somos nós a descobrir como variam as funções" (reflexão Elisa). Confirmou que a calculadora gráfica constituiu um instrumento de verificação e de prova, do efeito da alteração dos valores dos parâmetros a e b na representação gráfica das respectivas funções. Salientou, no entanto que "é necessário, tomar precauções com a calculadora" (reflexão Elisa), ou seja, que os alunos tenham algum cuidado na sua utilização pois é fundamental ter um espírito crítico relativamente à janela de visualização a considerar para cada caso. Para tal, é necessário que os alunos façam um estudo prévio da função que pretendem representar graficamente, para que a janela de visualização seja ajustada para cada situação. Refere também a necessidade dos alunos terem algum cuidado com os arredondamentos efectuados pela calculadora gráfica.

Raul salientou na sua reflexão (fig. 33), que a calculadora gráfica é uma ferramenta fundamental e fulcral para a compreensão da tarefa por parte dos alunos, assim como para a validação ou rejeição das conjecturas que previamente formularam. Refere também que este instrumento foi fulcral para o sucesso desta investigação na medida em que foi através da sua utilização e visualização que se construíram os gráficos das diferentes funções, formulando conjecturas e tentativas de prova.

> A máquina de calcular gráfica representa uma ferramenta essencial para a compreensão de toda esta tarefa bem como para a validação ou rejeição das nossas conjecturas e sem dúvida um instrumento fulcral e necessário para o sucesso desta tarefa, foi através desta que se realizaram não só os gráficos mas também foram consultadas as informações adicionais necessárias para a correcta realização da tarefa. Desta forma é mais fácil a compreensão do comportamento gráfico da função conforme a influência de cada um dos parâmetros. Toda esta importância associada à maquina calculadora demonstra o quão esta é necessária para realizar tarefas deste tipo, daí ser conveniente o seu uso.

Figura 33. Excerto B da reflexão sobre a tarefa 1 de Raul

Rafaela evidenciou também a importância da calculadora gráfica, devido à possibilidade de visualização dos gráficos das funções, diz mesmo " a calculadora foi um auxiliar pois ajudou-me a resolver as questões propostas e a visualizar as funções graficamente" (reflexão de Rafaela). No entanto, salientou que o facto da sua utilização, não foi suficiente para o desenvolvimento da investigação visto que foi necessário que os alunos detivessem conhecimentos matemáticos suficientes, para a sua concretização.

Note-se que nas reflexões, são poucos os alunos que enunciaram possíveis desvantagens na utilização da calculadora gráfica, referindo só os contributos para a investigação.

Dificuldades

As dificuldades sentidas pelos alunos no decorrer da presente investigação prenderam-se, com a necessidade de utilizar parênteses no denominador da função inversa, pois a escrita na calculadora gráfica envolve algumas considerações particulares. Alguns alunos, por terem omitido os parênteses no dominador, formularam conjecturas não válidas para a tarefa proposta. Uma outra dificuldade verificou-se quando os alunos pretenderam determinar a assimptota de uma função e limitaram-se a usar o *menu graph*, esquecendo-se de outras funções da calculadora gráfica tais como o *menu table* que possibilitava que o aluno confirmasse a equação da assimptota vertical, visto o visor para esse valor de x dava *error*.

Síntese

Durante a realização desta primeira tarefa os alunos sentiram algumas dificuldades, inicialmente na interpretação do enunciado e posteriormente na forma como deveriam proceder para efectuarem a investigação. Esta dificuldade inicial resultou de alguns alunos não se lembrarem do conceito de função afim e de inversa. Com a exploração da tarefa surgiu uma nova dificuldade relativa à construção do conceito de assimptota, que os alunos inicialmente denominaram de "buraco", "paragem" ou de "falha". Este facto, relativamente à dificuldade no conceito de assimptota não é de estranhar pois esta primeira tarefa foi aplicada, pela professora investigadora, como introdução ao tema das funções racionais, que era novo para os alunos. Apesar das dificuldades na fase de apropriação da tarefa, as lacunas foram sendo resolvidas quando os alunos começaram a atribuir diferentes valores aos parâmetros a e b e verificaram qual o comportamento gráfico de cada uma das funções. Os alunos descobriram que existiam algumas regularidades quando atribuíram determinados valores às incógnitas e começaram a impor condições relativamente a cada uma das conclusões que foram obtendo.

Durante a discussão em pequenos e em grande grupo, os alunos argumentaram relativamente às conjecturas formuladas e testadas, por si e pelos seus colegas, e efectuaram uma tentativa de prova das mesmas, através do estudo de vários exemplos, obtiveram uma generalização para a família de funções desta tarefa. Pela análise dos relatórios elaborados pelos alunos, constatou-se que alguns deles não referiram as conjecturas abandonadas durante o decorrer da exploração da tarefa. Estes alunos limitaram-se a explicar como resolveram a tarefa analiticamente, esquecendo-se, por vezes, de argumentarem relativamente ao processo de exploração da mesma. Para colmatar esta lacuna, a professora investigadora incentivou-os a melhorar o primeiro relatório, para que fossem mais explícitos no processo de raciocínio efectuado, não receando argumentar relativamente às conjecturas abandonadas, pois os erros cometidos fazem parte de todo o processo de investigação.

Quanto à utilização da calculadora gráfica, verificou-se que durante a realização do trabalho de grupo os alunos sentiram algumas dificuldades na exploração das suas potencialidades, apesar de terem demonstrado a necessidade do seu uso desde o inicio da investigação. A calculadora gráfica mostrou ser um instrumento importante para que os alunos elaborassem e testassem, de imediato, as suas conjecturas, pois de outra forma todo o trabalho desenvolvido seria muito mais moroso. A vantagem da calculadora gráfica, de possibilitar a visualização de vários gráficos em simultâneo, permitiu aos alunos observar e concluir, mais rapidamente, relativamente ao comportamento dos gráficos das funções pertencentes à família dada, nesta tarefa. Na discussão em grande grupo não foram evidenciadas dificuldades na utilização da calculadora gráfica, visto todas as lacunas já terem sido colmatadas durante a exploração da tarefa em pequeno grupo. No entanto, nos relatórios individuais, houve alguns casos em que os alunos ao representarem os gráficos das funções e em particular das equações das assimptotas, limitaram-se a copiar o que o visor da calculadora mostrava.

Assim, a capacidade dos alunos argumentarem matematicamente durante a exploração desta tarefa, foi potenciado com a utilização da calculadora gráfica, quer na formulação e teste das conjecturas quer na tentativa de efectivarem a sua prova.

5.2. Tarefa 2

Na tarefa 2, era dada uma família de funções mais complexa do que a estudada na tarefa 1, $f(x)=a+b/(cx+d)$, em que $a,b,c,d \in IR$, e proponha-se que os alunos a explorassem alterando os valores dos parâmetros de forma a tirarem algumas conclusões sobre o seu comportamento gráfico. Nesta tarefa, tal como na dada anteriormente os alunos podiam explorar algumas noções associadas ao conceito de função, tais como, o domínio, o contradomínio, os zeros, a monotonia, o sinal, a paridade e as assimptotas. Com esta tarefa os alunos desenvolvem uma melhor percepção sobre o conceito e o estudo de uma função.

Esta tarefa que estava planificada para ser desenvolvida em duas aulas mas teve de ser prolongada até aos primeiros quarenta e cinco minutos da terceira aula para que todos os alunos tivessem tempo para a investigação em pequenos grupos e para a discussão na turma.

5.2.1. O trabalho de grupo

Na tarefa 2 o trabalho de grupo desenvolveu-se ao longo de aproximadamente uma aula e meia. Todos os grupos empenharam-se e esforçaram-se na procura das possíveis conclusões à tarefa proposta. As gravações desenvolvidas por cada um dos grupos foram transcritas e analisadas de forma a serem tiradas algumas elações relevantes para o presente estudo. Assim, de seguida é feita uma análise relativamente à argumentação matemática e à utilização da calculadora gráfica durante o trabalho desenvolvido por alguns dos grupos.

A argumentação matemática

Em comparação com a tarefa 1, verificou-se nesta tarefa que, o trabalho desenvolvido em pequenos grupos, proporcionou aos alunos o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente, demonstrando ter menos dúvidas na sua investigação. Os grupos não tiveram dúvidas na formulação das suas conjecturas assim como em testarem-nas. A partir da exploração desta tarefa os alunos começaram a estruturar o seu processo de raciocínio, a encontrarem argumentos válidos para as suas conjecturas e iniciaram um processo rudimentar de prova matemática que no entender da professora investigadora está mais próxima de uma generalização pelo facto de estar em causa o estudo de uma determinada família de funções racionais.

Formulação e teste de conjecturas

Na fase inicial, de apropriação da tarefa todos os grupos demonstraram alguma facilidade em estruturar as suas investigações. Alguns grupos, de imediato se aperceberam que a nova família de funções a ser estudada englobava a família de funções trabalhada na tarefa anterior, que designaram de mais simples. Este facto é comprovado na análise dos diálogos do *grupo 1* e do *grupo 3*. Relativamente ao *grupo 1*, quando iniciaram a exploração da tarefa rapidamente descobriram que se $a=0$ e $b=1$ então a família reduz-se exactamente aquela que foi investigada na tarefa 1. Assim, estes alunos começaram a atribuir valores às incógnitas de modo a não investigarem o caso particular da família de funções trabalhada na tarefa 1. Posteriormente, atribuíram o valor 1 a todos os parâmetros e estudaram a função obtida, com a utilização da calculadora gráfica.

Elisa: Nesta tarefa temos que dar valores a a, b, c e d e ver como varia.
Fausto: Então não é igual à primeira?
Alexandra: Sim, mas nesta temos mais dois parâmetros o a e o b.
Júlia: Vamos por então 1 a todos os parâmetros para ser mais fácil o estudo.

No *grupo 3*, os alunos referiram também que, no caso $a=0$ e $b=1$, a presente tarefa reduzia-se à estudada anteriormente. Posteriormente, estes alunos organizaram o seu raciocínio criando uma função genérica fixa para depois pudessem comparar a sua representação gráfica com a de outras funções, em que os valores dos parâmetros eram diferentes.

Raul: Vamos primeiro criar uma função genérica. Então $a=0$, $b=1$, $c=1$ e $d=0$ vai ser aquela $1/x$ que foi a primeira que estudamos na tarefa 1.
Margarida: E dizemos isso! Dizemos que quando $a=0$, $b=1$, $c=1$ e $d=0$...
Raul: ... temos a função estudada na tarefa 1.
Célia: Então essa dizemos que foi a original no outro trabalho e por isso já estudamos.
Raul: Vamos agora atribuir valores simples a todos e criamos uma original para esta tarefa: $a=1$, $b=1$, $c=1$ e $d=1$.

Outros grupos, nomeadamente o *grupo 4*, começou a investigação atribuindo o valor zero a todos os parâmetros e a considerar que esta função era impossível, não efectuando, assim, o seu estudo.

Rafaela: Vamos iniciar o estudo da função dando valores às variáveis a, b, c e d.

Flora: Podemos começar por atribuir valores baixos às letras.
Amélia: Podemos dar a todas as incógnitas o mesmo valor para ver o que é que ocorre na função.
Rafaela: Vamos dar zero a todas as letras.
Flora e Conceição: A máquina não nos dá um gráfico.
Rafaela: Então a função é impossível.
Amélia: Se é uma função impossível não podemos fazer o estudo da função, certo?
Rafaela: Não, porque não temos valores de domínio nem de contradomínio, logo não podemos avaliar a função.
Flora: Olha, em vez de atribuirmos a todas as incógnitas valores iguais a zero, porquê que não damos a uma das quatro incógnitas valor igual a zero?
Rafaela: É isso, vamos tentar.

Pela análise deste pequeno excerto do diálogo desenvolvido pelo *grupo 4*, verificou-se que demonstrou uma grande evolução desde o inicio da tarefa 1. O facto é que na tarefa anterior este grupo teve várias dificuldades em entender o que é que se pretendia com a tarefa 1. Com a presente tarefa isso já não ocorreu pois, de imediato passaram à utilização correcta da calculadora gráfica apresentando argumentos plausíveis, para as suas conjecturas iniciais.

Na *fase da exploração*, os grupos começaram então a atribuir valores aos parâmetros e a verificar qual a representação gráfica que obtêm, para posteriormente começarem a tirar algumas das conclusões sobre a tarefa proposta. Vários grupos, nomeadamente os grupos 1, 2, 3 e 4 iniciaram a tarefa atribuindo a todos os parâmetros o valor 1. Por exemplo, o *grupo 1* começou por considerar o valor 1 para todos os parâmetros e a comparar as conclusões obtidas nesta tarefa em comparação com os resultados obtidos, na tarefa 1.

Júlia: Vamos por então 1 a todos para ser mais fácil.
Elisa: A assimptota vertical é -1 e a horizontal é 1.
Alexandra: Como esta tarefa é igual à outra e a assimptota era $-b/a$ então esta deve ser $-d/c$ não?
Fausto: Olha, muda os valores para ver se dá.
Júlia: Eu mudei o d para cinco e a assimptota deu -5. Então deve estar certo e ela desloca-se para a esquerda. Chama-se a stora. Pode vir aqui?
Elisa: Aqui a assimptota vertical pode ser dada por $-d/c$ certo?
Professora: Sim pode.
Elisa: Obrigada. Vamos mudar um de cada vez. Vamos começar pelo a.
Alexandra: Aumento o a para 5? Aumentei para 5 e o que mudou foi a assimptota horizontal.
Fausto: E quanto ficou?
Alexandra: 5.
Fausto: Então o a deve ser a assimptota vertical.
Júlia: Vamos confirmar com outros valores. Sim dá.
Elisa: Então já sabemos o domínio e o contradomínio. O domínio é $IR\setminus\{-d/c\}$.
Alexandra: E o contradomínio é $IR\setminus\{a\}$.

Este *grupo 1* desenvolveu a investigação da tarefa 2 mais facilmente, pois todos os alunos se aperceberam do facto de esta tarefa ser um prolongamento da tarefa 1. Todos os elementos deste grupo apresentou e testou as conjecturas consideradas, com a utilização da calculadora gráfica. O *grupo 7*, não se apercebeu inicialmente, que quando obtiveram $f(x)=1/x$, não era necessário efectuar o seu estudo, pois já tinha sido realizado na investigação anterior.

Vitória: Vamos tentar $a=0$, $b=1$, $c=0$ e $d=1$.
Dora: Já vimos que c e d não podem ser zero que a função dá impossível.
Vitória: Mas na faz mal verificar outra vez, pois não?
Dora: O.K.
Rui: Então, alguém se importa de dizer-me a função para ver o gráfico, se fazem favor?
Maria: Ah sim! A função fica $f(x)=1/x$?
Vitória: Sim.
Rui: Aleluia! É a nossa função!
Dora: O que queres dizer? Que o gráfico desta função é impar em relação a origem?
Rui: Exacto!
Dora: Então o d pode ser negativo, mas o $-d$ não!
Vitória: Não sei, mas por enquanto analisamos esta função e o gráfico, e depois podemos verificar a tua "teoria".
Maria: Então, como já sabemos, a função é impar porque é simétrica em relação a origem.
Vitória: É injectiva.
Rui: A função não apresenta zeros.
Dora: É impressão minha, ou esta função está muito parecida com a da tarefa 1?
Maria: A função acho que não, mas o gráfico sim.
Vitória: Devam ser da mesma "família".
Dora: Só que esta mais complexa.
Rui: Acho melhor chamar a professora para ter a certeza.
Maria: Professora, pode vir cá um bocado?
Professora: Sim, qual a pergunta?
Dora: Nós achamos que esta função é parecida com a da tarefa 1.
Vitória: Sim, será que são da mesma família de funções...
Maria: Só que esta é mais complexa do que a outra?
Professora: Continuem, porque vocês estão no bom caminho.

O *grupo 3*, a determinado momento da investigação atribuiu a todos os parâmetros o valor 1 e posteriormente consideraram a função $f(x)=1+1/(x+1)$ como a original. O objectivo destes alunos, era o de puder comparar, ao longo da investigação, o gráfico de cada função, resultante da alteração dos valores dos parâmetros, com a função original e, posteriormente, serem tiradas algumas conclusões.

Raul: Vamos agora atribuir valores simples a todos os parâmetros e criamos uma função original ...$a=1$, $b=1$, $c=1$ e $d=1$. Vamos ver na calculadora qual é o resultado!
Célia: Esta é a nossa função original.

Margarida: Sim
Raul: Vamos então considerar esta função porque o que interessa é comparar depois as alterações. Então fica $f(x)=1+1/(x+1)$.

O *grupo 7,* na sua discussão foi formulando várias conjecturas durante o raciocínio efectuado e, posteriormente foram testadas ao longo do processo de investigação. Estes alunos demonstraram, ao longo desta investigação, uma melhoria na formulação e reformulação das suas conjecturas, assim como, no teste das mesmas, com a utilização da calculadora gráfica.

Vitória: O domínio da função é IR.
Dora: Calma aí! Não é só IR, é IR excepto 0, porque não toma o valor zero.
Vitória: Ah, pois, tens razão!
Maria: E o contradomínio?
Dora: Também é IR excepto 0.
Rui: A assimptota horizontal é $y=0$; e a assimptota vertical é $x=0$.
Maria: A monotonia é decrescente de menos infinito até zero e de zero até mais infinito.

Pela análise de todas as discussões dos grupos verificou-se que nesta tarefa os alunos têm menos dificuldades em formularem as suas conjecturas e em testarem-nas. Este facto é evidenciado na forma como os alunos rapidamente chegam às conclusões e às possíveis generalizações, para a família de funções em estudo, nesta tarefa. Os alunos apresentaram os seus argumentos de forma a validarem as suas conjecturas, de uma forma mais rápida, visto o processo de investigação desta tarefa ser análogo ao efectuado, anteriormente.

Da conjectura à prova

Pelos argumentos apresentados ao longo da exploração desta tarefa verificou-se uma melhoria no processo de investigação dos grupos, principalmente nos que à partida podiam ser considerados como o que detinham mais dificuldades. Todos os alunos tentaram apresentar uma prova das suas conclusões para a família de funções apresentada, que eles denominaram de "mais complexa". No entanto, a prova novamente é muito limitada, pois tal como na tarefa anterior a forma como estas foram elaboradas faz com que os alunos tentem generalizar as suas conclusões de acordo com cada caso. No *grupo 1*, os alunos rapidamente desenvolveram argumentos de forma a efectuarem uma tentativa de prova matemática. No entanto, apenas chegaram a um conjunto de conclusões, que podem ser consideradas de generalizações.

Júlia: Se atribuirmos o mesmo valor a todas as incógnitas a assimptota vertical vai ser sempre -1.
Fausto: Pois é.

Elisa: E se aumentarmos o b não muda nada nas assimptotas. Podemos ver o que muda com ele negativo.
Fausto: É a monotonia.
Alexandra: Mas é melhor ver se é válido se alterarmos o sinal às outras incógnitas.
Júlia: Se o c for positivo e o b também ela fica crescente. Mas se forem os dois negativos já fica decrescente.
Elisa: Então a monotonia varia com o b e c.
Júlia: O que também varia com o b é o afastamento das hipérboles. Olha elas afastam-se.
Fausto: Pois é. Se variarmos o d deve variar a assimptota não é?
Alexandra: Sim pois é $-d/c$.
Júlia: Então o c também varia a assimptota Vertical.
Elisa: Mas não deve ser muito perceptível pelo gráfico.
Fausto: Pois porque como o $d=1$ se alterarmos o valor do parâmetro c as assimptotas vão ser: 0,1; 0,2; 0,3; ...
Júlia: Pois é. Tínhamos que ir ver a tabela.
Alexandra: E se mudarmos para 0 alguns parâmetros?
Elisa: Olha se o a fosse 0 era a tarefa 1 e assim a assimptota horizontal dava 0.
Júlia: Se fosse $b=0$ dava a recta $y=a$.
Fausto: Mas se fosse o $d=0$ e o $c=0$ dava impossível, pois qualquer número dividido por 0 dá impossível.
Elisa: Também sabemos que é injectiva e continua excepto na assimptota.
Alexandra: Vemos também que esta já tem zeros.
Elisa: Pois aqui a assimptota horizontal já não é zero.
Fausto: Excepto se a e d forem 0. Porque se forem já não tem 0.
Júlia: Quanto à paridade é igual à tarefa 1. Não é par, nem impar.
Elisa: Já deve estar tudo não?
Alexandra: Já temos: continuidade, injectividade, domínio, contradomínio, zeros, monotonia, paridade, ... Acho que está tudo.
Fausto: Está porque não tem sentido falar no período não é?
Elisa: Sim porque só se fala nisso nas funções seno, co-seno e tangente.
Júlia: Então vamos escrever as generalizações.

É de salientar, que os alunos do *grupo 1* estavam conscientes que as conclusões que obtiveram aquando da exploração da tarefa 2 são apenas generalizações. Em contrapartida, no *grupo 7*, as alunas chegaram a várias conclusões relativamente à família de funções sugerida na tarefa 2, considerando como função original $f(x)=1/x$. A escolha, por parte do grupo, de uma função inicial permitiu tirar conclusões para a família de funções, por comparação com a original.

Vitória: Acho que já estamos prontos para tira as conclusões.
Dora: Certo. Então a função é injectiva em todos os casos.
Rui: A função é impar em relação a assimptota e impar em relação a origem na função original.
Maria: A função apresenta zeros, menos na original.
Vitória: O domínio é *IR* excepto $-d/c$ que corresponde a assimptota vertical, não é?

Maria: Sim, e o contradomínio é IR excepto a que corresponde a assimptota horizontal.
Rui: O a influencia directamente a assimptota horizontal.
Dora: A monotonia varia com os valores do b e do c.
Rui: Podemos dizer que quando b aumenta, a função sofre uma translação afastando-se do eixo dos yy?
Maria: Sim, e quando a é diferente de zero então a função tem zeros, e também a função é contínua excepto na assimptota.
Vitória: Mais alguma coisa?
Dora: Acho que já falamos sobre tudo.
Rui: Também acho que não falta nada.
Maria: Agora se faltar alguma coisa só na discussão da turma é que vamos ver.

O *grupo 2* após atribuir o valor um a todos os parâmetros, resolveu verificar o que é que acontecia com o gráfico da função quando $a=5$, $b=1$, $c=1$ e $d=1$. Este *grupo 2*, tal como no *grupo 1* constatou, por experimentação, que o domínio da família de funções dada é $IR\setminus\{-d/c\}$, ou seja, chegou a uma generalização.

Luísa: Vamos experimentar agora com tudo igual a 1, excepto a que será 5.
Julieta: Fica $f(x)=5+1/(x+1)$.
Luísa: Através do gráfico vejo que a função tem domínio $IR\setminus\{-1\}$ e contradomínio $IR\setminus\{5\}$.
Sónia: Podemos pôr que esta função é injectiva e contínua excepto na assimptota.
Julieta: Mas vamos agora experimentar com valores negativos, quando $a=-5$.
Luísa: Oh! Há uma translação para baixo!
Sónia: Então, o valor de a influencia o deslocamento da função ao longo do eixo das ordenadas. E esta função tem como domínio $IR\setminus\{-1\}$ e contradomínio $IR\setminus\{-5\}$.
Julieta: Descobri uma coisa! O domínio é $IR\setminus\{-d/c\}$! Pois se dividirmos tudo por d, obtemos que o domínio será $IR\setminus\{-d/c\}$. E o contradomínio $IR\setminus\{a\}$.
Luísa: Pois é! E quanto maior for o valor de a em módulo, a assimptota da função afastar-se-á da origem.
Julieta: E vocês já repararam que quando $a>0$, a função sofre uma translação na parte positiva do eixo das abcissas e quando $a<0$ acontece precisamente o contrário!
Sónia: Muito bem! Vamos agora variar o valor do parâmetro b?

Pela análise deste excerto da discussão do *grupo 2*, contrariamente ao que se tinha verificado na tarefa 1, os alunos tomaram a iniciativa de validar os argumentos apresentados e manifestaram a necessidade da prova matemática. É de salientar que estas alunas após várias experimentações e estudos de casos particulares de gráficos de funções chegaram a várias generalizações para a família de funções proposta. A estrutura da investigação e do raciocínio foi feita de uma forma coerente e rigorosa e em que as alunas recorreram a vários exemplos para conseguirem encontrar as conclusões à tarefa.

> *Luísa:* Ora bem, vamos pôr tudo igual a um, excepto b que será igual a 5. Então o domínio será $IR \setminus \{-1\}$ e o contradomínio será $IR \setminus \{1\}$. E neste caso a função é monótona decrescente.
> *Julieta:* Nós estamo-nos a esquecer de pôr a assimptota vertical e horizontal ...
> *Sónia:* Então nesta função a assimptota vertical será dada por $x=-1$ e a assimptota horizontal é dada por $y=1$. E agora damos um valor negativo a ver o que é que acontece.
> *Julieta:* Tudo igual a 1 excepto b que será -5.
> *Luísa:* Domínio $IR \setminus \{-1\}$ e contradomínio $IR \setminus \{1\}$. A assimptota vertical será dada por $x=-1$ e a assimptota horizontal através de $y=1$. E aqui esta função é monótona crescente.
> Julieta: Podemos então concluir que se mantivermos todos os valores e se variarmos o valor de b, o domínio e o contradomínio não são influenciados.
> *Luísa:* E agora vem o c. Vamos pôr tudo igual a 1 e $c=5$.
> *Sónia:* A função será $f(x)=1+1/(5x+1)$, que terá de domínio $IR \setminus \{-1/5\}$, pois é $-d/c$. E o contradomínio é $IR \setminus \{1\}$.
> *Julieta:* Mas aqui a assimptota vertical será $x=-1/5$ e a assimptota horizontal será $y=1$.
> *Sónia:* E quando $c=-5$ e todos os outros valores são igual a 1, o domínio será $IR \setminus \{1/5\}$ e o contradomínio será igual ao da função anterior.
> *Luísa:* Vocês já repararam que os valores de b e de c são responsáveis pelo afastamento dos ramos da hipérbole?
> *Sónia:* Realmente, ainda não tinha reparado nisso ... mas quando $c<0$ a função é monótona crescente, e quando $c>0$ a função é monótona decrescente.
> *Julieta:* Mas isto só se verifica quando $b>0$ pois quando variamos o valor de c, b era sempre positivo.
> *Luísa:* E agora o d. Então tendo $d=5$ e quando todos os outros valores têm valor 1, $f(x)=1+1/(x+5)$.
> *Julieta:* E através do gráfico, esta função tem de domínio $IR \setminus \{-5\}$ e de contradomínio $IR \setminus \{1\}$.Quando $d=-5$ e a, b e c são iguais a 1, $f(x)=1+1/(x-5)$, a função terá como domínio $IR \setminus \{5\}$ e de contradomínio $IR \setminus \{1\}$.
> *Luísa:* E aqui houve uma translação no eixo das abcissas, no lado positivo. Se mantivermos todos os valores e se variarmos o valor de d, conseguimos observar uma translação ao longo do eixo das abcissas.
> *Sónia:* Podemos também dizer que d varia o valor da assimptota vertical!
> *Luísa:* Depois nas conclusões temos de pôr que esta função não é par nem é impar e quando $a \neq 0$, a função tem sempre zero.

Como é possível constatar, a discussão desenvolvida pelo *grupo 2* mostra que os alunos desenvolveram um trabalho de grupo, em que houve cooperação e partilha de argumentos e para além disso, desenvolveram a capacidade de efectuar uma prova, que como na tarefa anterior, resultou num conjunto de generalizações para a família de funções em estudo.

A calculadora gráfica

Nesta tarefa a utilização da calculadora gráfica foi imprescindível para que os alunos pudessem, de uma forma mais rápida, estudar a influência da variação dos valores dos parâmetros, no gráfico de uma função. Todos os grupos mostraram na exploração desta tarefa uma grande evolução no seu manuseamento, apesar de ainda alguns alunos não usufruírem de todas as suas potencialidades, devido a dificuldades no domínio de determinados conceitos matemáticos.

Contributos

O *grupo 2*, no inicio da exploração da tarefa começou a atribuir diferentes valores aos parâmetros. Quando as alunas deste grupo pretenderam, por exemplo, testar uma conjectura, de imediato recorrem à calculadora para tirarem as suas dúvidas relativas à sua validade.

Sónia: Podíamos por primeiro todos os parâmetros iguais a 0.
Julieta: Vai dar impossível.
Sónia: Não, 0 + 0 a dividir por 0 dá 0.
Luísa: Dá impossível!
Sónia: Não...
Julieta: Sim. Qualquer número a dividir por 0 é impossível.
Luísa: Pois é, olha na máquina...
Sónia: Ah, pois. Então, se o $c=0$ e $d=0$ vai dar sempre impossível.

Todas as discussões dos grupos evidenciam a importância da utilização da calculadora gráfica na investigação desta tarefa 2. Se este instrumento não fosse facultado aos alunos como auxílio de visualização dos gráficos das diferentes funções, esta investigação teria que ser prolongada por mais aulas.

Dificuldades

Durante o desenvolvimento dos trabalhos de grupo surgiram algumas dificuldades na utilização da calculadora gráfica, nomeadamente na visualização de gráficos incorrectos devido a considerarem no *menu janela* escalas não adaptadas ao gráfico que se pretende representar. No *grupo 6*, os alunos tiveram alguma dificuldade em visualizar o gráfico de uma das funções considerada, pois a escala na calculadora está desajustada, de modo a ser possível desenhar e estudar o gráfico correcto.

Duarte: Vamos considerar $a=2$, $b=4$, $c=-6$ e $d=-8$?
Bruna: Sim.
Afonso: A assimptota subiu.
Bruna: Ou seja, com o denominador negativo a assimptota vertical sobe.
Afonso: Agora vamos por o numerador negativo.
Duarte: Vai dar uma função crescente.
Bruna: Agora põe o parâmetro a positivo e o resto dos parâmetros negativos.
Afonso: Deu uma recta.
Bruna: Não parece ser uma recta, parece que dá um "salto" perto do eixo. Tenta considerar uma janela maior para ver se dá outra coisa.
Afonso: Sim, com uma janela maior já aparece a assimptota.

Uma outra dificuldade evidenciada pelo *grupo 6* foi o de não conseguir encontrar de imediato a equação da assimptota vertical pois a *falha* não era um número inteiro mas sim uma dizima. Como os alunos demonstraram ter dificuldade em determina-la analiticamente, ficaram sem saber qual era a equação, da referida *falha*.

Duarte: Temos que ver os valores que a função toma na tabela da máquina.
Afonso: Mas não aparece nenhuma *falha* na tabela.
Professora: Têm de ver qual é o valor para o qual a função tende mas não toca.
Duarte: Então é 1. Já estou em $x=38$ e $y=1{,}021$.

O *grupo 7* quando iniciou a exploração da tarefa 2 começou por atribuir o valor zero a todos os parâmetros e quando pretenderam verificar qual era o gráfico desta função pensaram que a máquina estava avariada, visto não ser possível visualizá-lo.

Vitória: Vamos ver o que acontece se atribuíssemos a todos o valor zero.
Dora: Então o $a=0$, $b=0$, $c=0$ e $d=0$. Quem vai ver gráfico na máquina?
Rui: Eu! Esperam um bocado, a função não vai ser $f(x)=0$? Então não é difícil de adivinhar que o gráfico não vai ter nenhum resultado. Já tenho o gráfico, olhai.
Maria: Pois, ele tem razão, o gráfico não mostra nada.
Vitória: Então deve ser impossível.
Maria: Vamos mudar, por exemplo, o a e o b para 1, e o c e o d para 0.
Rui: Como é que fica a função?
Dora: Deixa-me ver...já sei: $f(x)=1+1/0$.
Rui: 1 mais 1 a dividir por 0. Já esta! O quê? Não percebo nada, a minha máquina deve estar avariada, deixa-me tentar com a tua. ... Que estranho, dá a mesma coisa.
Vitória: Mas o que dá?
Rui: Nada!
Dora: Como assim nada?
Maria: Não passa por nenhum ponto?
Rui: Não! Já mudei a escala e tudo, e não dá nada.
Vitória: Será que esta função também é impossível?
Dora: Então o c e o d não podem ser zero?

Rui: Eu acho melhor tentar com outros números para ter a certeza.
Maria: É verdade. Antes de tirar conclusões, é melhor verificar com outros valores.

Neste caso, este grupo de alunos não conseguiu tirar conclusões relativamente aquilo que o visor da calculadora gráfica tentou transmitir, não por limitações da calculadora mas por dificuldades relativamente a alguns conteúdos matemáticos. No entanto, neste caso a calculadora limitou o raciocínio que os alunos deveriam efectuar inicialmente, quando atribuíram a todos os parâmetros o valor zero e também, no caso, em que o denominador da expressão algébrica era nulo. Na discussão do mesmo grupo, mas praticamente no final do trabalho, uma das alunas do grupo ainda não se tinha apercebido, que para escrever a expressão algébrica da função no *menu graph* da calculadora gráfica era necessário colocar parênteses na expressão do denominador. Assim, é obvio que o gráfico que obteve na sua calculadora gráfica foi diferente do obtido pelas restantes colegas do grupo. Note-se que, numa situação em que a referida aluna não pudesse confirmar o gráfico da função racional pretendida, iria tirar conclusões opostas às pretendidas.

Dora: Agora vamos mudar o valor de b e do c para negativo.
Rui: E deixamos o a e o d com o sinal positivo?
Maria: Mas vamos mudar o valor do c e do b para... -2, para não ser sempre o mesmo.
Vitória: Pode ser! Então a função fica $f(x)=1-2/(-2x+1)$.
Dora: Quem é que vai a máquina ver o gráfico?
Rui: O gráfico é assim.
Maria: Espera um bocado! O meu gráfico ficou completamente diferente. Porque será?
Vitória: Meteste os parênteses?
Maria: É preciso?
Dora: Deve ser se os gráficos são diferentes.
Maria: Ah deixa-me ver com parênteses...agora já dá certo.
Rui: Temos um zero. Que é...1/2.
Vitória: Tens a certeza?
Rui: Sim. Fui mesmo à máquina para descobrir o zero por isso tenho a certeza.

É de registar que as alunas deste *grupo 7* confirmaram sempre na calculadora as conclusões da tarefa que foram construindo.

5.2.2. Discussão na turma

A discussão dos resultados desta tarefa na turma realizou-se durante a primeira parte de uma aula de noventa minutos do dia 10 de Fevereiro. Nesta fase da investigação os alunos mantiveram-se, tal como na tarefa 1, sentados nos lugares ocupados durante o desenvolvimento dos trabalhos de grupo, apesar de participarem individualmente na discussão em grupo turma.

A argumentação matemática

Na discussão na turma sobre a tarefa 2, os alunos manifestaram uma maior facilidade em argumentar matematicamente sobre as conjecturas seguidas e abandonadas visto tratar-se da continuidade de um estudo que tinha sido iniciado com a tarefa 1. A tarefa 2 tratava-se do estudo de uma família de funções mais complexa do que a que foi estudada na tarefa 1, e tinha a particularidade de englobar os resultados obtidos na tarefa anterior caso os valores dos parâmetros fossem $a=0$, $b=1$ e $c,d \in IR$.

Formulação e teste de conjecturas

No momento inicial da discussão, a professora investigadora, tal como na tarefa anterior, começou por colocar no quadro interactivo o enunciado da tarefa e a incentivar todos os alunos a participarem. Como na primeira tarefa, na fase de *apropriação* da tarefa os alunos começaram por formularem conjecturas a partir da atribuição de valores aos parâmetros a, b, c e d.

> *Professora:* Mediante esta tarefa $f(x)=a+b/(cx+d)$ que vocês tinham de realizar. Tinham que fazer uma investigação sobre a alteração dos parâmetros... Neste caso temos os parâmetros a, b, c e d ... e agora queria que começassem por me dizer como é que pensaram?
> *Dora:* Nós começamos por dar valores $a=0$ e $d=0$ ...
> Professora: ...começaram então com $a=0$ e $d=0$ e mais...
> *Dora:* ... $c=1$ e $b=1$.

Enquanto os alunos iam comunicando entre si a professora tomava nota no quadro interactivo da primeira conjectura formulada pela turma. A conjectura formulada pela maioria dos alunos na fase de apropriação da tarefa foi igual, e consistia em verificar que se $a=0$, $b=1$, $c=1$ e $d=0$ então a representação gráfica da função resultante era uma recta. Esta conjectura após alguma discussão, foi refutada pois para os valores dos parâmetros considerados inicialmente pelos alunos a função era impossível e assim, não existia representação gráfica.

> *Professora:* Vocês também fizeram a mesma coisa.
> *Bruna:* Nós não... nós fizemos ... $c=0$ e $d=0$ e vimos como é que ficava...
> *David:* Nós começamos com todos os valores iguais...
> *Professora:* Vocês fizeram $c=0$ e $d=0$ e que conclusão é que tiraram?
> *Sónia:* É uma função impossível.

Luísa: Que é uma função constante...
Professora: Porquê?
Alguns alunos: Porque $f(x)=a$.
Raul: $y=a$... que é uma função afim.
Professora: Se o denominador $cx+d$ fosse zero então...
Raul: Era uma recta...
Professora: Acham que dava?
Raul: Não ficava $y=a+b/0$...
Professora: Então ficava assim $f(x)=a+b/0$. Isto é o quê?

Como alguns alunos ainda não tinham entendido que a conjectura que formularam tinha que ser abandonada e reformulada, a professora resolveu recorrer à calculadora gráfica instalada no quadro interactivo para mostrar a todos o que é que acontecia ao gráfico da função caso considerassem os valores dos parâmetros $a=0$, $b=1$, $c=1$ e $d=0$.

Professora: ...a função na calculadora...*menu graph*...
Duarte: Não dá nada...
Professora: O que é que a máquina está a fazer?
Sónia: É impossível, mesmo.
Professora: Porque é que a máquina não está a fazer nada? Porque...
Dora: Porque elimina o x...
Luísa: Porque o denominador é zero...
Professora: Então a função neste caso é...
Raul: Impossível.
Duarte: É nula.
Julieta e Sónia: É impossível.
Professora: Mas porque é que a função é impossível? Porque é que não dá? Matematicamente a função é impossível...
Luísa: Porque estamos a dividir por zero.
Raul: Por isso é que na máquina dá erro e não faz o gráfico da função...
Sónia: Porque o denominador é zero e assim a função é impossível.
Professora: Muito bem.

Após os vários argumentos apresentados pelos diferentes alunos para testarem se a conjectura formulada era verdadeira constataram, com a utilização da calculadora gráfica que tinha que ser refutada e reformulada. Assim, se $a=0$, $b=1$, $c=1$ e $d=0$ então a função $f(x)=a+b/0$, era impossível. Entretanto uma nova conjectura foi formulada por Sónia, ao considerar os valores dos parâmetros $a=1$, $b=1$, $c=1$ e $d=1$ verificou que a equação da assimptota era $x=-1$.

Sónia: Nós começamos por atribuir 1 a todos os parâmetros.
David: Nós também.
Elisa: Nós também primeiro encontramos a função mais simples.
Professora: Então encontraram a mais simples que era então a função $f(x)=1+1/(x+1)$ e...

Novamente, a professora com recurso à calculadora gráfica no quadro interactivo escreveu a expressão algébrica da função, de modo a que todos os alunos visualizassem o gráfico da função, em que todos os valores dos parâmetros eram iguais a 1.

Professora: Começaram por esta função. Então que conclusões tiraram?
Fausto: A assimptota é -1.
Professora: A assimptota, mas qual delas?
Aurora: A vertical...
Professora: Então a equação da assimptota vertical é $x=-1$.

David, a determinado momento da discussão formulou uma conjectura em que considerava que o parâmetro b influenciava a equação da assimptota vertical, mas os restantes alunos de imediato se apercebem que não era válida e apresentaram argumentos de forma a refutá-la.

David: Quanto maior for b, maior é a assimptota também, não é?
Professora: Quanto maior for b maior é a assimptota. Confirmam ou não?
Raul: Quanto maior for b menor é a assimptota. O b está em denominador?
Professora: Atenção o b está em numerador...
Raul: O valor de b não influência a assimptota ...
Professora: E se víssemos já na calculadora gráfica o que é que acontece? Então o David disse ao bocado que o b altera a assimptota...
Raul: Eu também disse que não...
Professora: Sim ou não? E porquê? Porque não basta dizer sim ou não. É também necessário dizer porquê. Então Raul não te importas, vais aí à calculadora gráfica e colocas aí uma função... Diz lá David um caso que tenhas considerado e que achas que altera.
David: Em vez da função $f(x)=1+1/(x+1)$ coloca a função $f(x)=1+8/(x+1)$.
Célia: Raul coloca as duas para podermos comparar...
David: Raul aumenta a janela...
Elisa: A assimptota dá a mesma...
Rafaela: Sim. Mas o que faz desviar a assimptota são os valores de c e de d. Pois se calculares analiticamente a assimptota vai dar a mesma.
Célia: Porque o c e o d é que influenciam a assimptota. Vai dar a mesma nas duas funções.
Professora: Portanto a conjectura que tu disseste David é falsa pois os dois contra-exemplos que consideras-te provam que não é válida.

É importante realçar a importância da calculadora gráfica no sentido de se poderem visualizar vários gráficos ao mesmo tempo, de modo a serem testadas as conjecturas previamente formuladas pelos alunos. Após as conjecturas iniciais formuladas, os alunos sentiram a necessidade de encontrarem argumentos de forma a provarem os resultados obtidos para a família de funções proposta na tarefa 2. É notório, com este excerto de diálogo, que a calculadora gráfica proporcionou a oportunidade dos alunos testarem se uma dada conjectura, previamente formulada, era válida ou não.

Da conjectura à prova

A determinado momento da discussão os alunos sentiram a necessidade de provar as suas conjecturas de forma a serem válidas para a família de funções $f(x) = a + b/(cx + d)$. Sónia tinha referido que o seu grupo atribuiu o valor 1 a todos os parâmetros e a partir do gráfico da função constatou que a equação da assimptota horizontal era $y = 1$. A partir desta constatação de Sónia, Elisa imediatamente concluiu que a assimptota horizontal para qualquer função pertencente à família de funções f era $y = a$.

> *Elisa:* A equação da assimptota horizontal é $y = 1$, logo a assimptota horizontal é sempre $y = a$...
> *Professora:* Então a equação da assimptota horizontal é $y = 1$ ... Elisa estava a dizer mais qualquer coisa...
> *Elisa:* No caso particular, a assimptota horizontal deu $y = 1$ mas no caso geral da $y = a$.
> *Raul:* Pois...
> *Professora:* Então a conclusão que me estão a dizer é que a assimptota horizontal é $y = a$ pois se alterarem o parâmetro a, este valor dá-nos sempre a assimptota horizontal. E agora?
> *Raul:* Nós pensamos nisso mas confirmamos dado outros valores a a ...
> *Célia:* Pois professora, para chegarmos a essa conclusão, confirmamos com outros valores que demos a a, mas mantivemos os outros valores dos outros parâmetros iguais a 1...
> *Professora:* Exactamente então como eles estão a dizer, mantiveram todos os outros valores, ou seja, o este quociente ficou igual, ou seja, todos os outros parâmetros ficaram iguais a 1 e só foram alterando o a ... e o a descobriram que correspondia à assimptota horizontal. E conclusão é que tiraram a partir daqui? Não tiraram mais nenhuma?
> *Célia:* Também que ...
> *Luísa:* ... o domínio é $IR \setminus \{a\}$...
> *Raul:* Não o contradomínio...
> *Professora:* Ah! Então é o domínio ou o contradomínio é que é $IR \setminus \{a\}$?
> *Alguns alunos:* É o contradomínio.
> *Professora:* Então o contradomínio da função é $IR \setminus \{a\}$.

Neste momento da discussão a professora já tinha registado no quadro interactivo a conclusão obtida pelos alunos relativamente à equação da assimptota horizontal $y = a$, para a família de funções da tarefa 2. Relativamente à equação da assimptota vertical, os alunos já tinham verificado anteriormente que caso $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 1$ então a $x = -1$. A partir desta conjectura validada, os alunos voltaram a essa conclusão por sugestão da professora e verificaram que, para a família de funções em estudo a equação da assimptota vertical era sempre $x = -d/c$.

Professora: ... vocês tinham então a função $f(x)=1+1/(x+1)$ e já tínhamos concluído que o contradomínio da função era $IR \setminus \{a\}$ e mais...
Célia: ...e o domínio ...
Alexandra: ...é IR excepto a assimptota...
Professora: Então o domínio da função é ...
Elisa: ... $IR \setminus \{-d/c\}$.
Raul: Neste caso não podemos dizer isso! Qualquer número a dividir por outro igual ia dar 1...
Elisa: Na função anterior a única coisa que não tínhamos... não tínhamos o a ... e verificamos que a assimptota vertical era $-b/a$ ... assim nesta função tinha que ser $-d/c$ ...

Esta última afirmação proferida por Raul fazia sentido no contexto da discussão visto ser insuficiente considerar apenas um exemplo para chegar a uma conclusão para todas as funções da tarefa 2. No entanto, a aluna que concluiu qual era a equação da assimptota vertical e o respectivo domínio da função f, aquando do trabalho de grupo considerou vários exemplos de forma a conseguir chegar a uma generalização. Para além dos exemplos considerados, a aluna por comparação com as conclusões obtidas na tarefa 1, que se tratava de um caso particular da tarefa 2, verificou que a equação da assimptota vertical era $x=-d/c$. Como em outras conclusões proferidas pelos alunos a professora continuou a registá-las no quadro interactivo.

Entretanto alguns alunos voltaram um pouco atrás na discussão para explicar qual foi o raciocínio que efectuaram de forma a chegar à prova de que a equação da assimptota vertical era $x=-d/c$ e a da horizontal era $y=a$.

Célia: Nós o que fizemos também é que tínhamos os valores todos 1 e depois íamos alterando sempre um, pondo um positivo e depois negativo. Por exemplo tínhamos o $a=-2$ e depois positivo e negativo...
Raul: ...individualmente...
Professora: Célia vem ao quadro explicar como é que raciocinas-te? Coloca o vosso raciocínio.

A aluna dirigiu-se então ao quadro interactivo (fig. 34), para explicar aos colegas da turma como é que o seu grupo pensou de forma a chegar a uma prova.

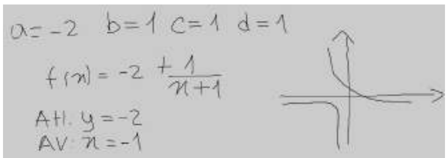


Figura 34. *Flipchart* A da tarefa 2 escrito por Célia

Entretanto os alunos continuaram a apresentar argumentos que permitissem chegar à conclusão das equações das assimptotas.

Raul: Nós fizemos qual era a alteração de cada um dos parâmetros individualmente...

Célia: Nós consideramos vários casos... Nós fizemos só o estudo do parâmetro a mas é necessário verificar se há alguma influência no b, no c e no d...
Raul: ... individualmente.
Célia: O a consideramos por exemplo negativo igual a -2...
Raul: ...e depois é que dividimos quais os valores que alteravam as assimptotas e o que é que cada um fazia... e em conjunto...
Aurora: Nós também fizemos assim professora.
Professora: Fizeram então também assim...
Raul: Porque assim podíamos ver qual era a influência individual de cada um... de cada parâmetro... e depois conseguíamos agrupa-los. Os que alteravam a função em termos de ... assimptotas...

Após esta fase da discussão os alunos relativamente à família de funções em estudo voltaram às conjecturas efectuadas e aos argumentos apresentados, com o objectivo de efectuarem a prova.

Aurora: Oh stora, por exemplo neste caso quando a é menor que zero e dando valores mais baixos, a função desloca-se para baixo e se dermos valores mais altos ela desloca-se para cima...
Célia: Sim...
Raul: ... claro, pois a assimptota vai ser positiva ou negativa conforme os valores de a.
Professora: Então, conforme está a dizer a Ana é muito importante. Portanto, se o valor de a é positivo a função desloca-se para cima e ...
Raul: ... a função sobe...
David: ... no eixo dos yy ...
Professora: ... exacto e se o valores de a for negativo a função desloca-se ...
David: ... a função desce em relação ao eixo dos yy.
Raul: O parâmetro a influência a assimptota horizontal.

Outra conjectura, de seguida foi formulada por Raul e de imediato passou ao seu teste e respectiva prova.

Raul: Nós chegamos à conclusão que se b e c tiverem o mesmo sinal a função é monótona decrescente e se tiverem sinais diferentes a função é monótona crescente.

A professora para que todos os alunos entendessem a conjectura formulada pelo Raul e os seus argumentos sugeriu que escrevessem no quadro interactivo as conclusões obtidas na discussão relativamente à monotonia da família de funções desta tarefa (fig.35).

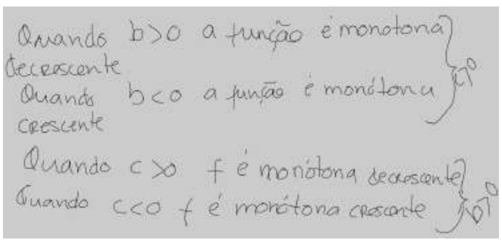


Figura 35. *Flipchart* B da tarefa2 escrito por Raul

Outros argumentos foram surgindo ao longo da discussão, em que os alunos procuraram encontrar conclusões para a família de funções em estudo. Por exemplo, os alunos constataram que caso os valores dos parâmetros fossem $a=0$ e $d=0$, a função resultante ficava igual a uma das funções estudadas na tarefa 1.

Dora: Quando $a=0$ e quando $d=0$...
Professora: ...a função fica igual a quê?
Dora: $f(x)=1/x$.
Elisa: Estamos num caso da primeira tarefa!
Professora: A Elisa disse e muito bem. Estamos novamente na primeira tarefa.

De seguida, surgiu uma nova conjectura em que os alunos consideraram que, se o valor de $a=0$ então a família de funções f não tinha zeros. Neste momento da discussão, os alunos confirmaram que a família de funções estudada na tarefa 1 era um caso particular da família investigada na tarefa 2.

Julieta: Quando o valor de a é igual a zero a função já não tem zeros.
Raul: Quando o valor de a é diferente de zero tem um zero. Porque o a é que condiciona a assimptota... Se assimptota horizontal vai ser zero então não há zeros.
Professora: Então, se o a for 0 o que é que acontece?
Raul: A assimptota é zero...
Aurora: ... a função não tem zeros.
Professora: Então o gráfico da função fica como?
Alguns alunos: Fica uma hipérbole.
Raul: Para a pergunta que há pouco a professora fez relativamente se a função tem sempre um zero a resposta basta colocar para $a \neq 0$.
Professora: Então para a família de funções que consideramos nesta tarefa basta que a seja diferente de zero para que a função tenha um zero.
Raul: Se a for igual a zero voltamos à família da tarefa 1, anterior, que não tem zeros.
Célia: A função da tarefa 1 pertence à família das funções desta tarefa.

Os alunos após as conclusões apresentadas passaram ao estudo da família de funções da tarefa, por sugestão da professora. Foi realizado um estudo relativamente à paridade e aos limites da função em estudo, em que os alunos apresentaram sempre os seus argumentos de forma a validarem as conjecturas efectuadas.

Professora: E injectiva é? E continua?
Célia: É injectiva e é contínua excepto na assimptota.
Professora: A função quer para $-\infty$ quer para $+\infty$ vai tender sempre para a assimptota...
Raul: ... horizontal. A equação da assimptota é $y=a$.
Vitória: Oh professora a função também é impar em relação à assimptota?
Professora: A função é impar em relação à assimptota...
Raul: ...vertical.
Elisa: Se pensarmos em termos da assimptota.

Professora: Sim em relação à assimptota. Mas de acordo com a definição de função impar esta função não é impar. Pois para a função ser impar, o gráfico da função tem de ser simétrico...
Raul: ... em relação à origem. Esta função não é par nem é impar.

Durante a discussão desenvolvida pela turma sobre a tarefa 2 constatou-se que o *grupo 3*, principalmente, Raul e Célia, tiveram sempre a preocupação de mostrar como é que efectuaram a prova de todas as conjecturas por si formuladas. Por vezes, não deixaram avançar a discussão porque queriam de uma forma mais detalhada e coerente chegar às conclusões para a família de funções em estudo.

A calculadora gráfica

Durante a discussão na turma, a calculadora gráfica tal como se verificou durante a exploração da tarefa 1, esteve disponível no quadro interactivo como um instrumento ao qual se recorreu sempre que foi necessário testar ou provar uma conjectura. É de salientar, que na investigação desta tarefa 2 houve um desenvolvimento da maneira como os alunos argumentaram matematicamente e verificou-se que se deveu principalmente à utilização da calculadora gráfica de forma adequada e coerente.

Contributos

Os contributos da utilização da calculadora gráfica nesta investigação foram vários, pois sem a sua utilização tornava-se mais morosa a exploração da tarefa 2. Como o objectivo desta tarefa, tal como na anterior, era que os alunos estudassem a influência da variação dos valores dos parâmetros na representação gráfica de uma família de funções, a calculadora gráfica tornou-se um instrumento fundamental para um normal desenvolvimento da investigação e num curto espaço de tempo.

São várias as evidências da importância da visualização dos gráficos das diferentes funções, como tentativa dos alunos testarem a veracidade das conjecturas formuladas. Quando a determinada altura da discussão os alunos referiram que na investigação da tarefa começaram por estudar uma família de funções, para valores dos parâmetros $a=0$, $d=0$ e $b,c\in IR$, a calculadora gráfica tornou-se um instrumento indispensável. É também de salientar que, neste momento da discussão, a conjectura formulada referia que, no caso particular da família de funções $f(x)=b/cx$, os gráficos obtidos eram simétricos em relação à origem.

Elisa: Bastava considerar $a=0$.

Professora: E a partir daqui nós tínhamos funções...
Raul: Impares.
Elisa: Não. Nem pares nem impares.
Dora: O d também tem que ser zero, professora!
Professora: Está a Dora a dizer que o d também tem de ser igual a zero para que...
Raul: ... a assimptota vertical ser igual a zero. Sendo zero já é impar pois o gráfico da função é simétrico em relação à origem.
Professora: Então $f(x)=b/cx$. Temos então uma função que é impar, independentemente do valor de b e independentemente ...
Raul: ...do valor do c. Professora, coloque na máquina...
Professora: E então se repararem se fizermos por exemplo ... $f(x)=1/x$ que já tínhamos considerado e ...
Fausto: ... $f(x)=-1/11x$.
Professora: ... -1 a dividir por $11x$, porque não. Digam outro exemplo qualquer.
Elisa: $f(x)=-1/11x$.

Entretanto, a professora na calculadora gráfica digitou o *menu graph* para ser possível visualizar simultaneamente os gráficos das funções consideradas (fig. 36) e, ao mesmo tempo para incentivar os alunos a apresentar argumentos sobre o que o visor mostrava relativamente ao comportamento gráfico das funções consideradas.

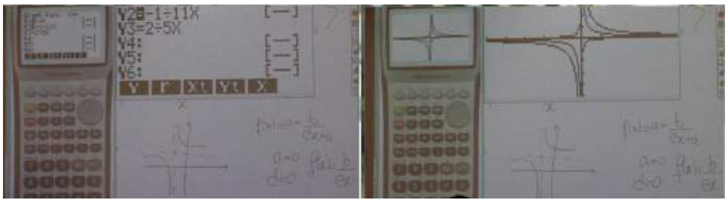


Figura 36. Imagem A da calculadora gráfica na tarefa 2

Os alunos sugeriram para alterar a janela para *standard* e depois como ainda não era possível visualizar correctamente as funções um aluno sugere à professora para recorrer ao *Zoom In* da calculadora.

Raul: Com o *Zoom In* vê-se melhor.
Professora: Reparem os gráficos das funções ou ficam mais próximos do eixo ou mais afastadas. As assimptotas quer horizontais quer verticais são...
Célia: ...as mesmas. A assimptota horizontal é $x=0$ e a assimptota horizontal é $y=0$.
Professora: Então se repararem, esta família sim é a única ...
Raul: Obrigado à calculadora...
Professora: ...esta família sim as funções são impares pois os gráficos são simétricos em relação à origem. O domínio e o contradomínio é...
Elisa: ... $IR\setminus\{0\}$.

A melhoria nos alunos na utilização da calculadora gráfica foi evidente, pois tornaram-se mais versáteis no uso deste instrumento, tirando maior partido das suas diferentes potencialidades. Torna-se também importante realçar que Raul num momento da discussão agradece à calculadora, pela possibilidade de rapidamente visualizar os gráficos das funções em estudo e de imediatamente puderem chegar a uma conclusão relativamente à conjectura previamente formulada, relativamente à paridade da família de funções $f(x)=b/cx$. Pela análise dos diálogos é notório que a utilização da calculadora gráfica potenciou a riqueza dos diálogos estabelecidos entre os alunos e, desta forma, estimulou-os a apresentar argumentos que justificassem as suas conjecturas.

Dificuldades

Uma das dificuldades na utilização da calculadora gráfica, surgiu quando Rafaela formulou uma conjectura na qual considerava que, se $a=10$, $b=12$, $c=14$ e $d=16$ então a função f não tinha zeros. Esta conjectura resultou de uma outra formulada por Célia, após discussão em turma, que referia que se todos os valores dos parâmetros fossem diferentes de zero então a função f tinha sempre um zero.

> *Célia:* Se todos os parâmetros forem diferentes de zero existe sempre um zero na função.
> *Rafaela:* Não, não, não...
> *Professora:* Atenção. Deixem ouvir a Rafaela que está a dizer não, não, não...
> *Rafaela:* Nós demos valores a $a=10$, $b=12$, $c=14$ e $d=16$ e a função não tinha zeros.
> *Professora:* Então vamos lá ver isso...

Após a conjectura efectuada por Rafaela, a professora de imediato sugeriu a João para recorrer à calculadora gráfica do quadro interactivo para que todos visualizassem o gráfico da função considerada. No entanto, surgiu logo uma dificuldade, a de não ser possível visualizar o gráfico devido à janela considerada não estar de acordo com o gráfico pretendido.

> *Célia:* Estes parâmetros são todos diferentes de zero!
> *Raul:* A janela é que está mal. Coloca a *standard*...
> *Julieta:* Oh João tens que considerar valores maiores para x e para y...
> *Raul:* Isso tem a ver com a resolução da máquina... Por isso é que não se vê...
> *Professora:* A Rafaela atribuiu valores muito altos e a janela *standard* é para casos em que os x e o y variam entre -10 a 10. Ora, a função não é visível, então...

O facto é que a janela na calculadora, era a mesma desde que se representou o gráfico da função $f(x)=1/x$. Assim, enquanto João tentava, na calculadora gráfica encontrar uma escala adequada de forma a ser possível visualizar o gráfico da função considerada por Rafaela, a professora no quadro interactivo desenhou o gráfico da função pretendida.

Como o João não conseguia encontrar uma escala que fosse adequada á função definida por Rafaela, o Raul disponibilizou-se para o fazer e de imediato e obteve assim, a representação gráfica pretendida (fig. 37).

Figura 37. Imagem B da calculadora gráfica na tarefa 2

Entretanto, Raul voltou a salientar que a conjectura formulada pelo seu grupo era válida pois como os valores dos parâmetros considerados por Rafaela eram todos diferentes de zero então a função tinha apenas um zero.

Julieta: Quando o valor de a é igual a zero a função já não tem zeros.
Raul: Quando o valor de a é diferente de zero tem um zero. Porque o a é que condiciona a assimptota... Se assimptota horizontal vai ser zero então não há zeros.
Professora: Então, se o a for 0 o que é que acontece?
Raul: A assimptota é zero...e a função não tem zeros.
Professora: Então o gráfico da função fica como?
Alguns alunos: Fica uma hipérbole.
Professora: No caso da Rafaela, qual foi o erro na conjectura delas?
Raul: Foi a janela...
Professora: Pois a função tem valores muito grandes. A calculadora gráfica neste caso deu origem a uma conjectura errada... Claro que esta função tem apenas um zero. Claro que esta função também tem assimptota vertical e horizontal.

É evidente que a conjectura formulada por Rafaela, não era válida, portanto teve de ser reformulada. A formulação desta conjectura deveu-se principalmente às dificuldades das alunas na utilização da calculadora gráfica de forma activa e crítica. No entanto, é salientar que, apesar das dificuldades das alunas, a discussão na turma possibilitou a todos a apresentação de argumentos de forma a testar a veracidade da conjectura formulada. Esta discussão só foi possível, devido à utilização da calculadora gráfica instalada no quadro interactivo, como forma de todos os alunos, simultaneamente, testaram e confirmaram a conjectura formulada pelo grupo de Rafaela.

5.2.3. Relatório e reflexão

Nesta tarefa, visto tratar-se de uma continuidade da anterior, os alunos manifestaram menos dificuldade na elaboração do relatório de investigação. De seguida, são apresentados excertos dos relatórios desenvolvidos por alguns alunos, de acordo com as categorias de análise: argumentação matemática e calculadora gráfica.

A argumentação matemática

Na elaboração deste relatório sobre a tarefa 2, os alunos tiveram mais facilidade em argumentarem sobre o modo como formularam as suas conjecturas e, como tentaram realizar a prova de algumas delas.

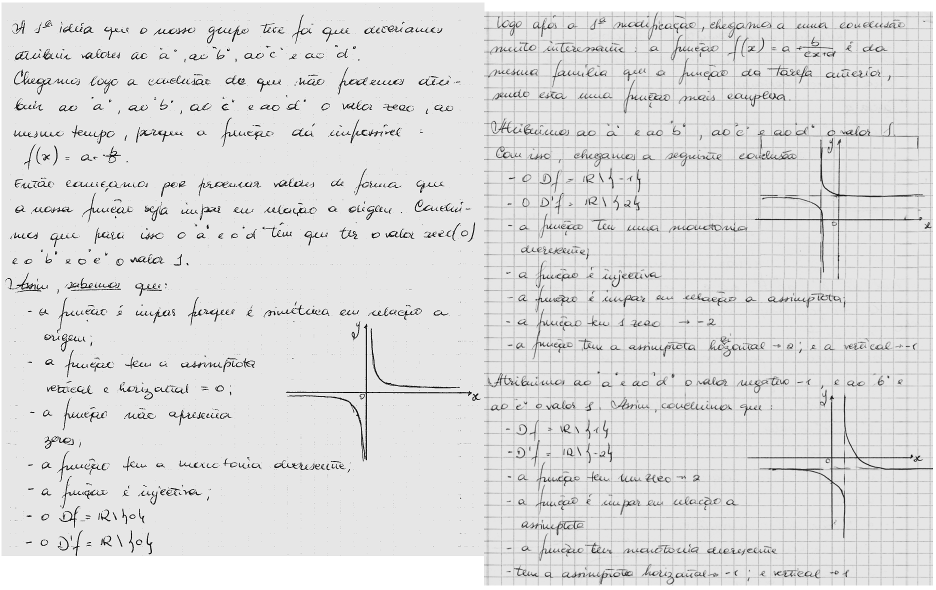
Formulação e teste de conjecturas

Os alunos iniciaram o relatório de investigação sobre a tarefa 2 de uma forma mais metódica do que a que tinham efectuado, na anterior tarefa. Na fase de exploração da tarefa, os alunos começaram a atribuir valores aos parâmetros de acordo com as conjecturas que iam formulando e tentando provar, relativamente à família de funções em estudo. Nesta tarefa de investigação, as estratégias de raciocínio evidenciadas nos relatórios individuais, foram análogas para todos os alunos. Como os alunos já tinham realizado na primeira tarefa o estudo da influência da variação dos parâmetros a e b no gráfico de uma função $g(x)=1/(ax+b)$, nesta tarefa, foram acrescentados mais dois parâmetros c e d, ficando a família de funções transformada na família $f(x)=a+b/(cx+d)$. Os alunos formularam, de imediato, uma conjectura que rapidamente tentaram justificar, que referia que se $a=0$ e $b=1$ então a função f reduz-se exactamente à família estudada na tarefa 1. Célia, do grupo 1 fez exactamente referência a esta conjectura no inicio do seu relatório (fig. 38).

- Iniciamos por verificar quais os parâmetros que poderiam ser igual a 0.
- Se a fosse 0 a função seria igual á da tarefa 1.
- Se b e c fossem 0 a função f seria uma recta pois assim não haveria x.
- Depois demos a todos os parâmetros o valor 1 para obtermos a nossa função original.
- De seguida demos valores positivos e negativos a cada um dos parâmetros.
- De seguida fomos registando numa tabela todas as informações que conseguimos tirar da sua representação gráfica:

Figura 38. Excerto A do relatório da tarefa 2 de Célia

Uma outra aluna, a vitória do *grupo 7* referiu quais as conjecturas formuladas e que conclusões obtiveram para cada um dos casos considerados. No excerto do relatório de Vitória (fig. 39), é também notória a preocupação da aluna, em efectuar o estudo da função relativamente às equações das assimptotas, zeros, monotonia, domínio e contradomínio. No entanto, os exemplos considerados e os argumentos apresentados são escassos, relativamente às conclusões obtidas.



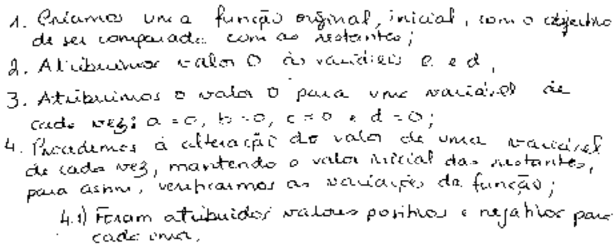
A 1ª ideia que o nosso grupo teve foi que deveríamos atribuir valores ao 'a', ao 'b', ao 'c' e ao 'd'.
Chegamos logo à conclusão de que não podemos atribuir ao 'a', ao 'b', ao 'c' e ao 'd' o valor zero, ao mesmo tempo, porque a função dá impossível: $f(x) = a \cdot \frac{0}{0}$.
Então começamos por procurar valores de forma que a nossa função seja ímpar em relação à origem. Concluímos que para isso o 'a' e o 'd' têm que ter o valor zero(0) e o 'b' e o 'c' o valor 1.
Assim, sabemos que:
- a função é ímpar porque é simétrica em relação à origem;
- a função tem a assimptota vertical e horizontal = 0;
- a função não apresenta zeros;
- a função tem a monotonia decrescente;
- a função é injectiva;
- o $Df = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
- o $D'f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Logo após a 1ª modificação, chegamos a uma conclusão muito interessante: a função $f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$ é da mesma família que a função da tarefa anterior, sendo esta uma função mais complexa.
Atribuímos ao 'a' e ao 'b', ao 'c' e ao 'd' o valor 1. Com isso, chegamos à seguinte conclusão:
- o $Df = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
- o $D'f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$
- a função tem uma monotonia decrescente;
- a função é injectiva
- a função é ímpar em relação à assimptota;
- a função tem 1 zero → -2
- a função tem a assimptota horizontal → 0; e a vertical → -1

Atribuímos ao 'a' e ao 'd' o valor negativo -1, e ao 'b' e ao 'c' o valor 1. Assim, concluímos que:
- $Df = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
- $D'f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$
- a função tem um zero → 2
- a função é ímpar em relação a assimptota
- a função tem monotonia decrescente
- tem a assimptota horizontal → -1; e vertical → 1

Figura 39. Excerto A do relatório da tarefa 2 de Vitória

A Julieta no relatório da tarefa 2 efectua um raciocínio em tudo semelhante ao realizado para a tarefa 1 explicando processo efectuado ao longo da exploração da tarefa (fig. 40).



1. Criamos uma função original, inicial, com o objectivo de ser comparada com as restantes;
2. Atribuímos valor 0 às variáveis e, e d,
3. Atribuímos o valor 0 para uma variável de cada vez: a = 0, b = 0, c = 0 e d = 0;
4. Procedemos à alteração do valor de uma variável de cada vez, mantendo o valor inicial das restantes, para assim, verificarmos as variações da função;
   4.1) Foram atribuídos valores positivos e negativos para cada uma.

Figura 40. Excerto A do relatório da tarefa 2 de Julieta

As conjecturas formuladas por Julieta e pelos elementos do seu *grupo 2* foram testadas e, posteriormente, colocadas num quadro síntese de acordo com cada condição considerada para os parâmetros da tarefa 2. É de salientar, o estudo exaustivo efectuado por Julieta, ao fazer variar ao máximo os valores das incógnitas de forma a testar todas as possibilidades de representação gráfica das funções pertencentes à família dada.

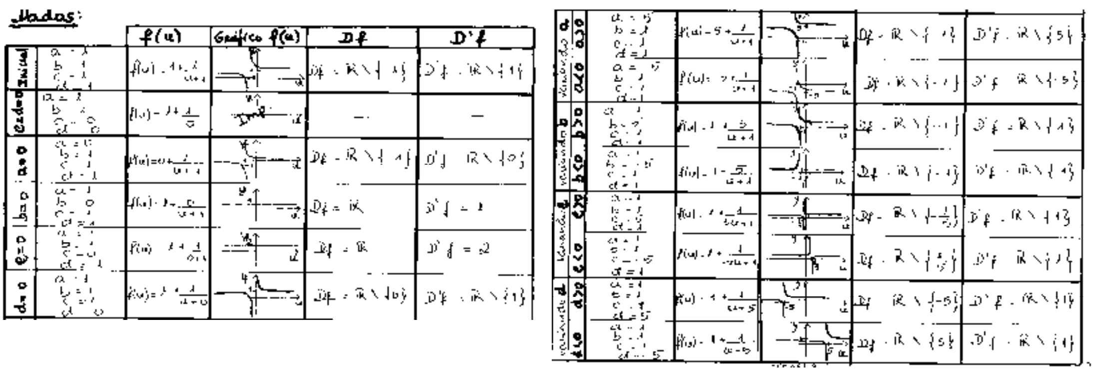


Figura 41. Excerto B do relatório da tarefa 2 de Julieta

No entanto, pela análise do excerto de Julieta (fig. 41), verifica-se que a aluna apenas apresentou as conclusões obtidas a partir da variação dos valores dos parâmetros, não argumentado sobre o porquê de ter estudado todos estes casos. Em contrapartida, Júlia, realizou no seu relatório (fig. 42), um raciocínio análogo ao efectuado pela Julieta, mas apesar de não considerar tantos caso como a colega, foi argumentando ao mesmo tempo que explicava os resultados quanto às representações gráficas das funções obtidas.

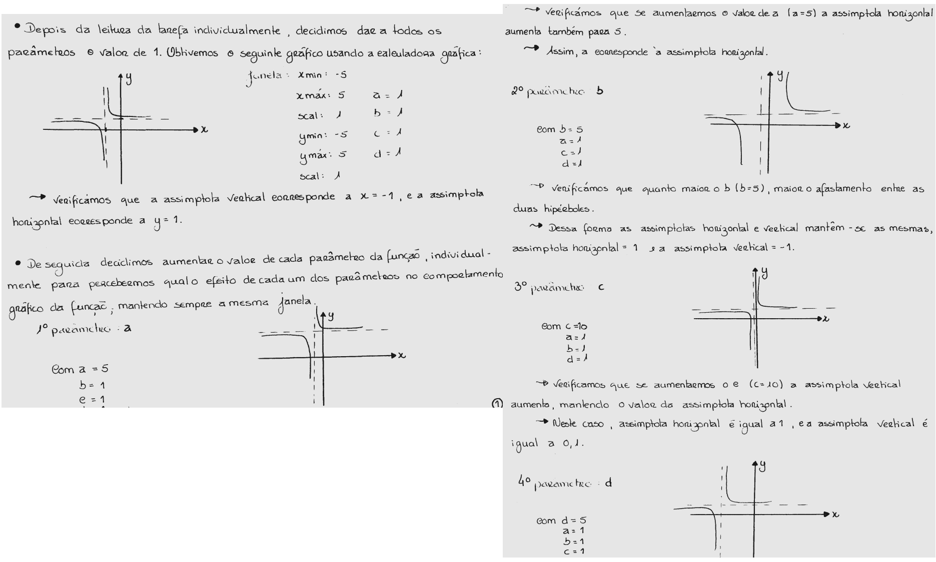


Figura 42. Excerto do relatório da tarefa 2 de Júlia

Outra aluna, no seu relatório (fig. 43), a Célia efectuou o estudo de vários casos em que foi alterando os valores dos parâmetros para conseguir formular algumas conjecturas e verificar ao mesmo tempo a validade das mesmas. Note-se que a aluna manteve sempre três incógnitas iguais a 1 e foi alterando o valor da quarta incógnita que ou era positiva ou então negativa.

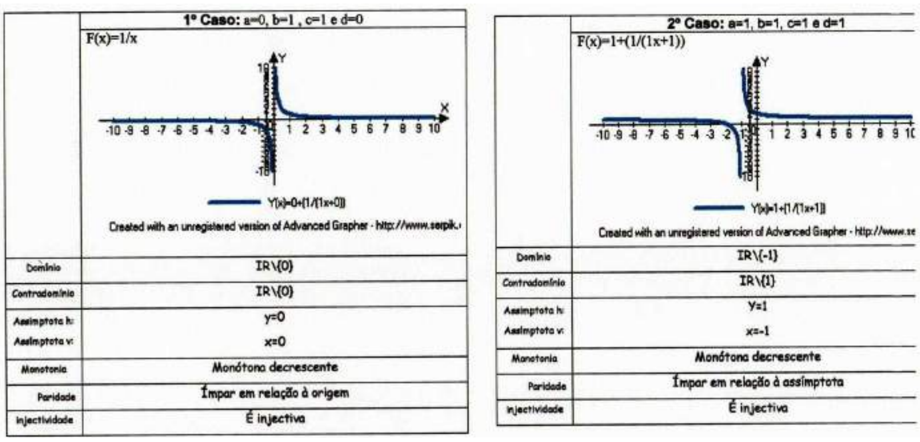


Figura 43. Excerto B do relatório da tarefa 2 de Célia

Esta aluna considerou como 3º caso: $a=2$ e $b=c=d=1$, 4º caso: $a=-1$ e $b=c=d=1$; 5º caso: $a=c=d=1$ e $b=2$; 6º caso: $a=c=d=1$ e $b=-2$; 7º caso: $a=b=d=1$ e $c=2$; 8º caso: $a=b=d=1$ e $c=-2$; 9º caso: $a=b=c=1$ e $d=2$; e

10º caso: $a = b = c = 1$ e $d = -2$. Todos os alunos fizeram variar os valores das incógnitas e, tal como Célia, realizaram o estudo de cada função. Posteriormente, os alunos através da visualização dos gráficos das funções obtidas resultantes da variação dos valores dos parâmetros na calculadora gráfica, passaram à tentativa de prova das suas conjecturas de modo a obterem uma generalização para a família de funções em estudo.

Da conjectura à prova

Os alunos passam da conjectura à prova através da visualização e confirmação dos resultados na calculadora gráfica. Célia, que começou por realizar um estudo de uma forma organizada sobre a influência da alteração dos valores dos parâmetros no gráfico de uma função, refere das conjecturas formuladas quais foram as seguidas e quais foram abandonadas, apresentando os seus argumentos que a levaram a fazer tais opções (fig. 44).

Conjecturas seguidas e abandonadas:

Além do que foi aplicado na tabela os nossos passos foram os seguintes:

1º caso:

Neste 1º caso consideramos o valor de a e de d igual a zero para provarmos que é possivel, obtendo uma função que já tinhamos obtido na tarefa 1, em que não existe cruzamentos com os eixos.
Esta é a única função que é impar por definição, ou seja, em relação á origem.

2º caso:

Neste caso, consideramos todos os parâmetros com valor igual a 1, considerando esta a nossa função original, assim ao variar o valor dos parâmetros poderíamos comparar com ela. Verificamos através da maquina calculadora, no table, que a assímpota horizontal era 1, assim pensamos que poderia ser o valor de a, porque na tarefa 1 não existia esse parâmetro e a assímpota era 0. A assímptota vertical também era igual a 1, se pensássemos que era o mesmo raciocínio da tarefa 1, a assimptota serio -(d/c) mas como todos os parâmetros eram 1 ainda nada podíamos concluir com certezas.

3º caso:

Na condição seguinte escolhemos o valor de a=2 com finalidade de saber qual a influência que a variação deste parâmetro tinha na função e também confirmar as conclusões que foram verificadas no caso anterior. Então verificamos que a assímptota horizontal era y=2, confirmando o que foi dito acima. Como variou a assimptota verificou se no gráfico também um deslocamento na vertical para cima, ou seja, quando se aumenta o valor de a, o gráfico desloca se para cima.

4º caso

Aqui pretendíamos saber se ao mudar o sinal do valor de a, aconteceria alguma coisa, consideramos a=-1 e o resto dos parâmetros todos igual a 1. O que apenas verificamos é que varia a assímptota e então o gráfico também se desloca para baixo.

5º caso

Relativamente ao parâmetro a já tiramos as conclusões pretendidas, passando assim para o b. Consideramos o valor de b=2 e o resto dos parâmetros igual a 1, que verificamos foi que com o aumento do valor do parâmetro b, a função apenas se desvia mais dos eixos, ou seja, existe um maior afastamento entre ela. Durante esta alteração reparamos que o valor de b não influenciava a assimptota, assim existem mais indícios que levam a provar que a assímptota vertical era a que tínhamos previsto.

6º caso:

Relativamente ao parâmetro b, trocamos lhe o sinal e ficou b=-2, continuando os outros com o valor de 1. Desta vez, ao contrário de todas as outras, os quadrantes que predominam a função são o 2º e o 4º. Então através desta experiência concluímos que quando o valor de b é positivo os quadrantes que predominam são o 1º e o 3º, e quando o valor de b é negativo os que predominam são o 2º e o 4º.

7º caso:

De seguida alteramos o parâmetro c, 1º positivo, c=2, sendo todos os outros iguais a 1. Aqui confirmamos que a assimptota vertical é do tipo : x= -d/c. Logo, podemos concluir que quando o valor positivo de c aumentar e o de d permanecer a assimptota desloca-se da esquerda para a direita.

8º caso:

Considerando agora o parâmetro c negativo, como o parâmetro d é positivo a função torna-se positiva, porque o sinal de c e da assimptota anulam-se, mas quanto maior for o valor negativo de c, a assímptota deslocar-se-á da direita para a esquerda, ou seja, diminuirá. Como se verifica com o parâmetro b, podemos concluir que quando c toma valores negativos os quadrantes que predominam são o 2º e o 4º,mas devemos ter em atenção que isto só acontece se o valor de b permanecer positivo, porque se os dois parâmetros tomarem sinais iguais, sejam positivos ou negativos, os quadrantes que predominam são o 1º e o 4º.

9º caso:

Chegando ao ultimo parâmetro, aumentamos para o valor 2 verificando qual a sua funcionalidade. Através do gráfico podemos verificar que a assímptota diminui, porque como ela é negativa, quanto maior for o valor positivo de d, menor será a assímptota, deslocando se assim o gráfico no sentido da direita para a esquerda. Devemos ter atenção que isto apenas se verifica se o valor de c permanecer positivo, visto que ele também condiciona a assímptota.

10º caso:

Considerando agora o parâmetro d negativo, apenas se verifica alteração na assimptota, porque é um dos parâmetros que a condiciona, então se o valor de c permanecer, e o parâmetro d tomar valores negativos a assimptota torna se positiva, assim quanto maior for o valor de d com sinal negativo, maior será a assímptota.

Além disto também concluímos que se todos os parâmetros tomarem valores $\neq 0$ existem zeros.

Figura 44. Excerto C do relatório da tarefa 2 de Célia

Célia apresentou também no seu relatório todas as conclusões obtidas pelo seu grupo após efectuarem a investigação, sob a forma de uma tabela síntese (fig.45).

Sendo assim com a discussão em turma e as nossas conclusões podemos construir o seguinte modelo:

	Consoante a, b, c e d, mas considerando c≠0
	F(x)= a + (b/(cx+b))
Domínio	**IR \\{-d /c}**
Contradomínio	**IR \\{a}**
Assimptota	
Horizontal	**y = a**
Vertical	**x = -d/c**
Monotonia	**Quando b e c têm sinais iguais é monótona decrescente** **Quando b e c têm sinais diferentes é monótona crescente**
Zeros	**Intersecção da função com o eixo dos xx**
Paridade	**É impar em relação á assimptota**
Injectividade	**É injectiva**
Continuidade	**Contínua excepto na assimptota**

Figura 45. Excerto D do relatório da tarefa 2 de Célia

Uma outra aluna, Julieta do *grupo 1*, após ter registado todos as conjecturas efectuadas numa tabela, como já foi referido anteriormente, passou à apresentação dos seus argumentos de forma a justificar as conclusões obtidas na investigação (fig.46). Note-se que a aluna após o estudo exaustivo de cada um dos casos estudados, da mesma forma justificou os resultados obtidos para cada um deles.

→ Quando c e d = 0, a função f(x) é impossível pois qualquer número a dividir por 0 é impossível;
→ Quando a = 0, a função fica igual à estudada anteriormente, na Tarefa 1: $f(x) = \frac{1}{x+1}$;
→ Quando b = 0, $f(x) = 1 + \frac{0}{x+1} \Leftrightarrow f(x) = 1 + 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$, a função f(x) = a, que é uma função constante.
→ Quando c = 0, a função é constante, pois desaparece o x (cx + d);
→ Quando d = 0, assimptota vertical é o eixo dos yy's, 0
→ Para a, b, c e d ≠ 0, a função é uma hipérbole,
→ a é o valor da assimptota horizontal;
→ Quanto maior o valor de a em módulo mais se afasta a assimptota da origem;
→ Quando o valor de a varia, a função sofre uma translação vertical.
  → Quando a > 0, a função sofre uma translação positiva no eixo das ordenadas.
  → Quando a < 0, a função sofre translação negativa no eixo das ordenadas;
→ O valor de b não influencia no Df e D'f,
→ Quanto maior o valor de b em módulo, mais afastados estão os ramos da hipérbole;
  → Quando b > 0, a função é monótona decrescente;
  → Quando b < 0, a função é monótona crescente,
  → Quando o valor de b passa de positivo para negativo e vice-versa, as funções são simétricas em relação à assimptota horizontal;
→ Tanto o valor de b como o valor de c variam o afastamento (forma) e simetria
→ $f(x) = a + \frac{\frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$

→ Se a e d = 0, a função não tem zeros,
→ Quando o valor de d varia sofre uma translação horizontal.
  → Quando d > 0, a função sofre uma translação para a esquerda ao longo do eixo dos xx's;
  → Quando d < 0, a função sofre uma translação para a direita ao longo do eixo dos xx's.

Resumindo,
a → assimptota horizontal,
  → translação vertical,
b → afastamento
  → simétrico em relação à assimptota horizontal,
c → afastamento:
  → simétrico em relação à assimptota vertical;
d → translação horizontal.

• Assimptota horizontal → a logo, $D'f = \mathbb{R} \setminus \{a\}$
• Assimptota vertical → $-\frac{d}{c}$ logo, $Df = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$
• Função injectiva pois a dois objectos diferentes correspondem imagens diferentes.
• Função contínua \ {a}

Figura 46. Excerto do relatório da tarefa 2 de Julieta

Como no anterior relatório os alunos tiveram de efectuar uma reflexão sobre a presente tarefa. Uma das opiniões dos alunos, foi que esta tarefa não foi tão desafiante e entusiasmante como a anterior pois o objectivo era em tudo semelhante. Uma das alunas, Júlia, referiu exactamente este aspecto que entendeu menos positivo na investigação nesta tarefa, diz mesmo: "na minha opinião, esta tarefa não foi tão interessante como a anterior, pois correspondia em parte à tarefa 1" (excerto de Júlia). Apesar de a tarefa ter sido menos interessante de investigar do que a anterior, a aluna voltou a realçar a importância das tarefas de investigação pois trata-se de uma forma dos alunos construírem e adquirirem os seus próprios conhecimentos, desenvolvendo assim a capacidade de argumentar matematicamente. Esta aluna salientou também, a importância dos trabalhos de grupo, pois os alunos aprendem a saber ouvir, a saber partilhar as suas ideias.

Outra aluna, Alexandra, realçou também na sua reflexão, a importância da cooperação, compreensão, entreajuda e espírito crítico no desenvolvimento do trabalho de grupo. Alexandra salientou a importância da discussão desenvolvida na turma pois considera que proporciona o desenvolvimento de "capacidades matemáticas, como também capacidades de empatia e de entendimento entre todos os elementos da turma" (excerto de Alexandra).

Maria, na sua reflexão considerou que esta tarefa correu melhor que a anterior pois, "na discussão em grupo turma tiraram-se conclusões mais rapidamente, o que facilitou o trabalho" (excerto de Maria). Salientou também o empenho dos alunos no desenvolvimento desta sequência de tarefas de investigação.

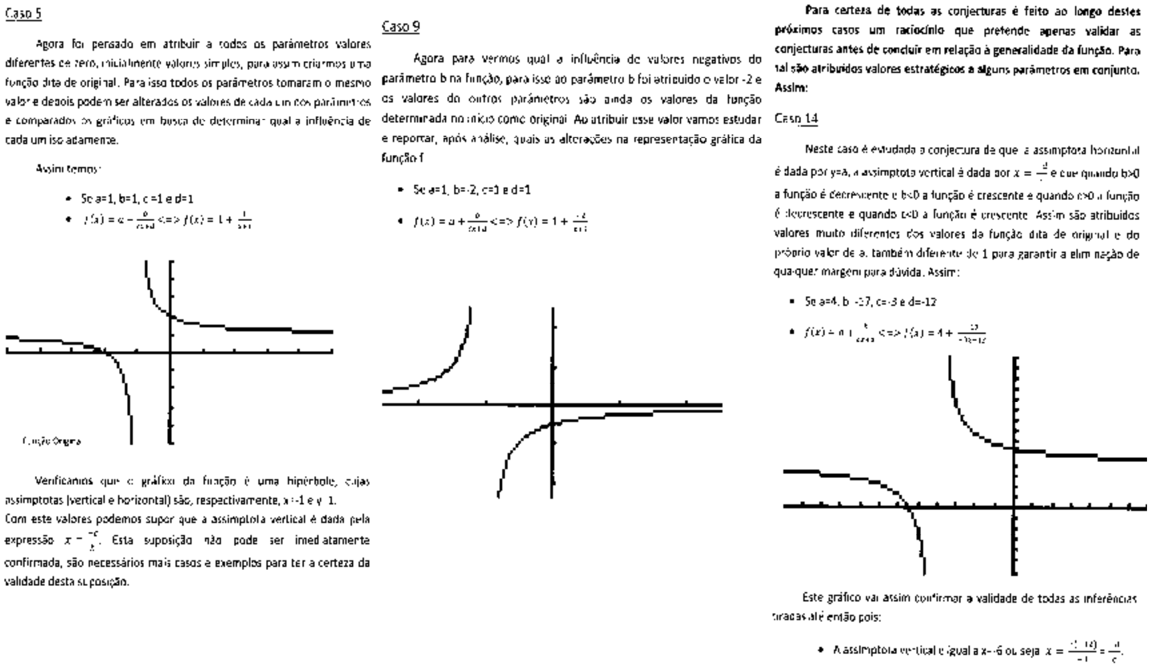
Uma outra aluna, Célia, considerou que esta tarefa foi mais fácil de investigar devido a ser uma continuidade da anterior. Salientou que estas investigações são interessantes e motivadoras da aprendizagem dos alunos pois tornam a matemática, uma disciplina muito mais variada e divertida. Célia, foca uma aspecto importante relativamente à importância da implementação das tarefas neste estudo, ao referir que "estou a aprender as funções de uma forma interessante, em que chego eu às conclusões e os erros que são feitos por mim, mais dificilmente serão esquecidos" (reflexão de Célia). Esta aluna salienta, na sua reflexão, que o erro faz parte da aprendizagem e, assim, do desenvolvimento do conhecimento dos alunos.

A calculadora gráfica

Como na tarefa 1 os alunos já tinham explorado algumas das funções da calculadora gráfica e o objectivo desta investigação era análogo ao da anterior, a turma não evidenciou grandes dificuldades na sua utilização. Tal como na tarefa anterior, os alunos utilizaram a calculadora gráfica desde o inicio da sua investigação.

Contributos

A calculadora gráfica, nesta investigação continuou a ser um importante instrumento para a verificação e teste das conjecturas formuladas pelos alunos assim como na tentativa de prova. Nomeadamente, Raul, no seu relatório (fig. 47), por diversas vezes recorreu ao visor da calculadora gráfica para a partir da visualização do gráfico das funções puder formular, testar e tentar provar as suas conjecturas.


Caso 5

Agora foi pensado em atribuir a todos os parâmetros valores diferentes de zero, inicialmente valores simples, para assim criarmos uma função dita de original. Para isso todos os parâmetros tomaram o mesmo valor e depois podem ser alterados os valores de cada um dos parâmetros e comparados os gráficos em busca de determinar qual a influência de cada um isoladamente.

Assim temos:

- Se a=1, b=1, c=1 e d=1
- $f(x) = a + \frac{b}{cx+d} <=> f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$

Função Original

Verificamos que o gráfico da função é uma hipérbole, cujas assimptotas (vertical e horizontal) são, respectivamente, x=-1 e y=1.
Com este valores podemos supor que a assimptota vertical é dada pela expressão $x = \frac{-c}{b}$. Esta suposição não pode ser imediatamente confirmada, são necessários mais casos e exemplos para ter a certeza da validade desta suposição.

Caso 9

Agora para vermos qual a influência de valores negativos do parâmetro b na função, para isso ao parâmetro b foi atribuido o valor -2 e os valores do outros parâmetros são ainda os valores da função determinada no início como original. Ao atribuir esse valor vamos estudar e reportar, após análise, quais as alterações na representação gráfica da função f

- Se a=1, b=-2, c=1 e d=1
- $f(x) = a + \frac{b}{cx+d} <=> f(x) = 1 + \frac{-2}{x+1}$

Para certeza de todas as conjecturas é feito ao longo destes próximos casos um raciocínio que pretende apenas validar as conjecturas antes de concluir em relação à generalidade da função. Para tal são atribuidos valores estratégicos a alguns parâmetros em conjunto. Assim:

Caso 14

Neste caso é estudada a conjectura de que a assimptota horizontal é dada por y=a, a assimptota vertical é dada por $x = \frac{-d}{c}$ e que quando b>0 a função é decrescente e b<0 a função é crescente e quando c>0 a função é decrescente e quando c<0 a função é crescente. Assim são atribuidos valores muito diferentes dos valores da função dita de original e do próprio valor de a, também diferente de 1 para garantir a eliminação de qualquer margem para dúvida. Assim:

- Se a=4, b=17, c=-3 e d=-12
- $f(x) = a + \frac{b}{cx+d} <=> f(x) = 4 + \frac{17}{-3x-12}$

Este gráfico vai assim confirmar a validade de todas as inferências tiradas até então pois:

- A assimptota vertical é igual a x=-6 ou seja $x = \frac{-(-12)}{-2} = \frac{-d}{c}$.

Figura 47. Excerto do relatório da tarefa 2 de Raul

Conforme, Raul foi efectuando o estudo de cada caso, formulou uma conjectura ou várias e depois tentou validá-la na análise de outros casos que considerou pertinentes investigar com a utilização da calculadora gráfica.

No final dos relatórios, os alunos realizaram uma reflexão relativa à utilização da calculadora gráfica durante a investigação da tarefa 2. Júlia, referiu que o facto de se ter utilizado a calculadora gráfica instalada no quadro interactivo, fomentou e proporcionou o desenvolvimento da discussão na turma pois permitiu a todos a visualização das representações gráficas das funções ao longo da realização da investigação, diz mesmo "pelo facto de podermos utilizar a calculadora gráfica no quadro interactivo é uma forma de ficarmos a entender melhor cada tarefa e termos uma melhor discussão em turma, pois podemos apresentar os gráficos obtidos ao longo da realização de cada tarefa" (reflexão de Júlia).

Uma outra aluna, Célia, salientou a importância da utilização da calculadora gráfica instalada no quadro interactivo da mesma forma que Júlia, acrescentando que com este instrumento os alunos puderam "explicar o raciocínio" aos seus colegas, durante a investigação da tarefa. É de salientar que tal como Júlia, Célia considera que a calculadora gráfica contribuiu para o desenvolvimento da discussão da turma e para a confirmação dos argumentos apresentados pelos seus colegas, através da possibilidade de visualização dos gráficos considerados durante a exploração da tarefa, referindo mesmo "neste tipo de trabalho é importante a utilização da calculadora gráfica porque assim podemos visualizar os gráficos vendo as alterações que são feitas de um gráfico para o outro" (reflexão de Célia).

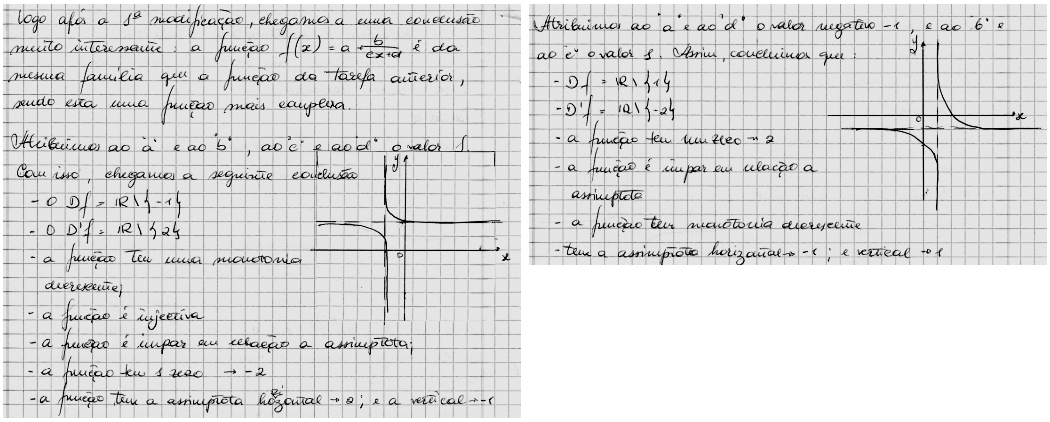
Um outro aluno, Raul, salientou também a calculadora gráfica como uma ferramenta essencial na compreensão da investigação assim como para validar ou rejeitar as conjecturas formuladas, dizendo que "a calculadora gráfica representa uma ferramenta essencial para a compreensão de toda esta tarefa bem como para a validação ou rejeição das nossas conjecturas é sem dúvida um instrumento fulcral e necessário para o sucesso desta tarefa" (reflexão de Raul). Este aluno na sua reflexão salienta que a calculadora gráfica proporcionou e potenciou o desenvolvimento da capacidade dos alunos em argumentar matematicamente, na medida em que estes foram incentivados, pelo seu uso, a formularem e a testarem a validade das suas conjecturas.

Rafaela, salientou também a importância da calculadora gráfica, enquanto instrumento de visualização dos gráficos das funções e que quando instalada no quadro interactivo estimula e potencia a comunicação e argumentação matemática entre os alunos. Esta aluna escreve mesmo que "a calculadora gráfica e o quadro interactivo têm sido instrumentos importantes para a visualização gráfica das funções e para o debate de ideias" (reflexão de Rafaela).

Vitória, refere também que "a utilização da calculadora gráfica nesta tarefa é muito importante porque nos mostra os gráficos das funções, os zeros, as assimptotas" (reflexão de Vitória), ou seja, calculadora gráfica é um importante instrumento na determinação do gráfico de uma função e para efectuar o seu estudo. No entanto, realça a importância de que os alunos não se podem esquecer de colocar os parênteses no denominador das funções racionais, quando inserem as suas expressões analíticas na calculadora gráfica, senão o gráfico e o seu estudo estão em desacordo com a tarefa proposta.

Dificuldades

Uma das dificuldades diagnosticadas nesta tarefa que também se tinha confirmado na anterior, é o facto de os alunos ao desenharem com papel e lápis o gráfico da função que o visor da calculadora mostrava, tiveram tendência a imitar sem pensarem que a equação da assimptota não fazia parte da representação gráfica (fig. 48 e 49).

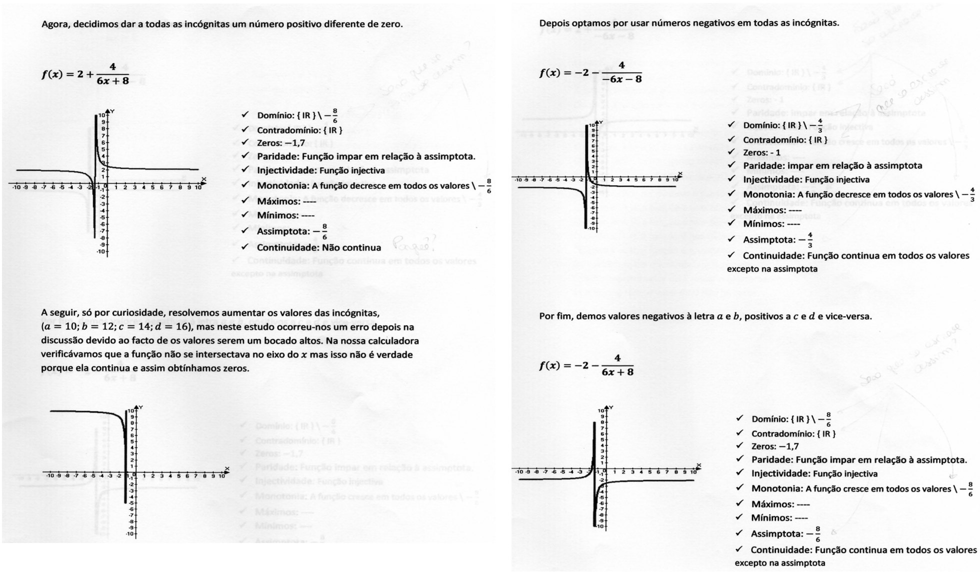

Logo após a 1ª modificação, chegamos a uma conclusão muito interessante: a função $f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$ é da mesma família que a função da tarefa anterior, sendo esta uma função mais complexa.

Atribuímos ao "a" e ao "b", ao "c" e ao "d" o valor 1.
Com isso, chegamos a seguinte conclusão
- o $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- o $D'f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- a função tem uma monotonia decrescente;
- a função é injectiva
- a função é impar em relação a assimptota;
- a função tem 1 zero → −2
- a função tem a assimptota horizontal → 2; e a vertical → −1

Atribuímos ao "a" e ao "d" o valor negativo −1, e ao "b" e ao "c" o valor 1. Assim, concluímos que:
- $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $D'f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
- a função tem um zero → 2
- a função é impar em relação a assimptota
- a função tem monotonia decrescente
- tem a assimptota horizontal → −1; e vertical → 1

Figura 48. Excerto B do relatório da tarefa 2 de Vitória

Vitória, na representação gráfica das suas funções sobrepõe a curva e a assimptota como se esta última fizesse parte da função (fig. 48). Note-se que algumas calculadoras gráficas mostraram no seu visor essa mesma sobreposição, como se o domínio das funções fosse o conjunto dos números reais e não existisse assimptota vertical. Este caso é evidenciado no relatório de Flora, que colocou no seu relatório exactamente a imagem do visor da sua calculadora gráfica (fig. 49).


Agora, decidimos dar a todas as incógnitas um número positivo diferente de zero.

$f(x) = 2 + \frac{4}{6x+8}$

- ✓ Domínio: { IR } \ $-\frac{8}{6}$
- ✓ Contradomínio: { IR }
- ✓ Zeros: −1,7
- ✓ Paridade: Função impar em relação à assimptota.
- ✓ Injectividade: Função injectiva
- ✓ Monotonia: A função decresce em todos os valores \ $-\frac{8}{6}$
- ✓ Máximos: ----
- ✓ Mínimos: ----
- ✓ Assimptota: $-\frac{8}{6}$
- ✓ Continuidade: Não continua

Porquê?

A seguir, só por curiosidade, resolvemos aumentar os valores das incógnitas, ($a = 10; b = 12; c = 14; d = 16$), mas neste estudo ocorreu-nos um erro depois na discussão devido ao facto de os valores serem um bocado altos. Na nossa calculadora verificávamos que a função não se intersectava no eixo do x mas isso não é verdade porque ela continua e assim obtínhamos zeros.

Depois optamos por usar números negativos em todas as incógnitas.

$f(x) = -2 - \frac{4}{-6x-8}$

- ✓ Domínio: { IR } \ $-\frac{4}{3}$
- ✓ Contradomínio: { IR }
- ✓ Zeros: - 1
- ✓ Paridade: impar em relação à assimptota
- ✓ Injectividade: Função injectiva
- ✓ Monotonia: A função decresce em todos os valores \ $-\frac{4}{3}$
- ✓ Máximos: ----
- ✓ Mínimos: ----
- ✓ Assimptota: $-\frac{4}{3}$
- ✓ Continuidade: Função continua em todos os valores excepto na assimptota

Por fim, demos valores negativos à letra a e b, positivos a c e d e vice-versa.

$f(x) = -2 - \frac{4}{6x+8}$

- ✓ Domínio: { IR } \ $-\frac{8}{6}$
- ✓ Contradomínio: { IR }
- ✓ Zeros: −1,7
- ✓ Paridade: Função impar em relação à assimptota.
- ✓ Injectividade: Função injectiva
- ✓ Monotonia: A função cresce em todos os valores \ $-\frac{8}{6}$
- ✓ Máximos: ----
- ✓ Mínimos: ----
- ✓ Assimptota: $-\frac{8}{6}$
- ✓ Continuidade: Função continua em todos os valores excepto na assimptota

Figura 49. Excerto do relatório da tarefa 2 de Flora

Torna-se portanto importante que, os alunos tenham um espírito crítico relativamente à imagem que o visor da calculadora gráfica mostra, para não formularem conjecturas erradas devido a dificuldades de interpretação dos resultados.

Síntese

Durante a investigação desta tarefa em pequenos grupos, verificou-se que os alunos manifestaram uma grande evolução no desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente e demonstram ter menos dúvidas na investigação, pois formularam e testaram as suas conjecturas assim como reconheceram a necessidade de as tentar provar. Os alunos, estruturaram o seu processo de raciocínio, encontraram argumentos válidos para as suas conjecturas e iniciaram um processo rudimentar de prova matemática, que no entender da professora investigadora, esteve mais próxima de uma generalização. Na discussão na turma os alunos manifestaram-se, recorrendo a raciocínios mais elaborados do que os verificados na tarefa anterior. Pois, com alguma facilidade, apresentaram argumentos válidos de forma a validar ou refutar as conjecturas formuladas pelos seus colegas de turma. No relatório desenvolvido individualmente, constatou-se que os alunos elaboraram-no de uma forma mais metódica do que o realizado na tarefa anterior, tendo o cuidado de explicar todo o processo de investigação desenvolvido pelo seu grupo de trabalho, argumentando sobre todas as conjecturas seguidas e sobre todas as que foram abandonadas.

Durante a realização desta tarefa, a utilização da calculadora gráfica, tornou-se imprescindível para que fosse possível estudar, de uma forma mais rápida a influência da variação dos valores dos parâmetros, no comportamento do gráfico das funções. Em todos os grupos, foi evidente uma grande evolução no seu manuseamento, apesar de ainda alguns alunos não usufruírem de todas as suas potencialidades, devido a dificuldades no domínio de determinados conceitos matemáticos. A utilização da calculadora gráfica contribuiu para a elaboração, teste e tentativa de prova das conjecturas formuladas pelos alunos. Na discussão em grande grupo e na elaboração dos relatórios individuais, não foram diagnosticadas dificuldades no manuseamento da calculadora gráfica. No entanto, verificou-se que uma minoria dos alunos revelou novamente dificuldade em desenharem o gráfico da função que o visor da calculadora mostrava pois tendencialmente imitaram, sem pensar que a equação da assimptota não fazia parte da representação gráfica.

5.3. Tarefa 3

A tarefa 3, tinha como objectivo que os alunos após a exploração das duas primeiras tarefas fossem confrontados com uma investigação diferente, na qual tinham que aplicar os conhecimentos adquiridos anteriormente, na modelação de uma função que permitisse determinar as dimensões de todos os rectângulos que verificassem simultaneamente duas condições: o perímetro é numericamente igual à área e as medidas de comprimento dos lados do rectângulo são números naturais. Durante esta investigação, os alunos foram incentivados a conjecturar sobre as possíveis funções racionais que verificavam as condições da tarefa e a verificar se as soluções encontradas eram as únicas.

5.3.1. O trabalho de grupo

Os alunos desenvolveram a investigação sobre a tarefa 3 durante duas aulas de noventa minutos. Contrariamente ao que a professora investigadora previu, a exploração da presente tarefa demorou mais algum tempo do que estava previsto. Esta demora, deveu-se inicialmente a algumas dificuldades no entendimento do enunciado da tarefa e posteriormente devido à importância dos argumentos que os alunos foram construindo, de modo a encontrarem todas as possíveis soluções. A investigação decorreu assim, em duas aulas de noventa minutos.

A argumentação matemática

Esta tarefa era um diferente das anteriores, pois pretendia que os alunos a partir dos conceitos adquiridos nas primeiras tarefas sobre as funções racionais, os aplicasse a uma situação real. Com esta tarefa, os alunos desenvolveram a sua capacidade de argumentar matematicamente.

Formulação e teste de conjecturas

Na fase de *apropriação* da tarefa os grupos começaram por elaborar conjecturas de forma a encontrar uma expressão que lhes permitisse comparar o perímetro e a área de um rectângulo, como é o caso do *grupo 7*.

> *Vitória:* Ora bem, vamos começar por onde?
> *Dora:* Pelo que percebi, temos de encontrar rectângulos em que o perímetro é igual à área...
> *Vitória e Dora:* ...e em que a as medidas do comprimento dos lados sejam números naturais.
> *Dora:* Então nós sabemos que a área do rectângulo é igual ao comprimento vezes a largura e o perímetro é a soma de todos os lados...
> *Rui:* $P = 2l + 2c$.
> *Vitória e Dora:* Sim...

Em particular, o *grupo 3* começou, na fase inicial de apropriação da tarefa, com a elaboração de uma conjectura que consistia em atribuir valores iguais à área e ao perímetro e a tentar, através da resolução de um sistema de duas equações, chegar ao valor x (comprimento) e y (largura).

Margarida: Vamos lá começar.
Raul: Se $A=8$ e $P=8$ então $2x+2y=8$ e $x.y=8$.
Célia: Mas dá uma coisa impossível.
Raul: Pode ser que dê ...
Célia: Não dá, porque na máquina dá raízes impossíveis.

Este grupo elaborou uma conjectura, testou-a com a utilização da calculadora gráfica e verificou que era impossível. Assim, estes alunos verificaram que a conjectura que inicialmente tinham elaborado tinha que ser abandonada. Seguidamente, os outros grupos, nomeadamente o *grupo 1*, iniciou a fase da *exploração* atribuindo valores aleatórios a cada uma das variáveis l e c, medidas de largura e comprimento do rectângulo. Foram efectuando várias tentativas no sentido de encontrar rectângulos que verificassem as condições dadas sem recorrerem à calculadora, limitando-se apenas a fazer pequenos cálculos mentais.

Júlia: Nesta tarefa temos que achar valores do comprimento e da largura para a área ser igual ao perímetro.
Fausto: Vai-se por tentativas.
Alexandra: Vamos ver então números que possam dar. Têm de ser inteiros, não é?
Júlia: Sim e positivos.
Elisa: Olha 4 dá. É um quadrado, mas é um rectângulo na mesma. 4x4 dá 16.
Alexandra: ...e 4+4+4+4 dá 16 também, então está certo.
Fausto: Descobri outro, 3 e 6. A área e o perímetro dão 18.
Elisa: Já temos dois.

Este *grupo 1*, desenvolveu inicialmente o seu raciocínio por tentativas, tendo descoberto de imediato todas as soluções à tarefa proposta. Apesar de terem encontrado as dimensões, às quais correspondiam números naturais, relativamente a todos os rectângulos em que o perímetro era igual à área, este grupo, nesta fase da investigação, ainda não tinha desenvolvido argumentos de forma a provarem que os valores encontrados eram os únicos possíveis.

De outra forma, mas chegando às mesmas soluções, o *grupo 7* elaborou o seu raciocínio também por tentativa erro.

Rui: Vamos considerar $l\times c=2l+2c$.
Dora e Vitória: Sim.
Dora: Vamos experimentar com 2 e 4 ... não dá.
Vitória: Vamos considerar 2 e 3 ...
Maria: Também não dá.
Dora: Vamos experimentar 3 e 6... este dá.
Rui: Experimenta 3 e 4.
Maria: Não dá.
Vitória: 2 e 4.
Dora: Também não dá. Bem, assim nunca mais!
Vitória: 4 e 4
Dora: Isso é um quadrado e nós queremos um rectângulo.
Vitória: Têm de ser números reais, não é?

Dora: Naturais!
Vitória: E quais são os números naturais?
Dora: todos os números positivos, sem vírgulas e sem zeros.
(...)
Maria: Vamos tentar ir por sistemas ou fórmulas.
Dora: Também digo.
Maria: Eu tentei encontrar uma fórmula que desse para provar que o 6 e o 3 dava, sendo o comprimento 6 e 3 a largura, estava correcta. Mas nenhum dava certo. Primeiro fiz por sistema, mas não dava.
Vitória: Pois não, sabes porque?! Tu tentaste analiticamente, e nós por tentativas e só dá o $l = 3$ e $c = 6$.
Maria: Se calhar em enganei-me no sistema.
Dora: Vamos fazer de novo... se temos que a área é igual ao perímetro, sendo a área igual a $c \times l$ e o perímetro igual $2l + 2c$.
Vitória: Eu acho que não deve dar mais nenhum, por nenhuma forma, se tem de ser um número inteiro e números inteiros só dão esses.

Pela análise deste excerto da discussão do grupo 7, verificou-se que estes alunos formularam as suas conjecturas e testaram-nas, no entanto, cometem alguns erros de raciocínio. Os erros cometidos deveram-se a dificuldades no domínio de alguns conceitos matemáticos básicos.

Da conjectura à prova

As tentativas seguidas pelos alunos, a determinado momento da investigação desencadearam uma necessidade de encontrar uma alternativa que lhes permitisse identificar todos os rectângulos que verificavam as duas condições dadas. Apesar de terem encontrado dois casos, que verificavam a igualdade entre o perímetro e a área, nos alunos começou a instalar-se a dúvida se os casos encontrados eram os únicos ou se poderiam existir mais. Os grupos começam então a tentar encontrar uma fórmula, de modo que fosse possível provar que os valores encontrados, por tentativa erro, eram as únicas soluções da tarefa proposta.

O *grupo 1*, considerou que como o tema que estava a ser estudado nas anteriores tarefas era o das funções racionais então tinha de ser possível encontrar a expressão algébrica da função e, por análise gráfica ou por tabela, verificar se apenas só existiam três situações, em que o perímetro de um rectângulo era igual à sua área.

(após várias tentativas)
Júlia: Já não conseguimos encontrar mais...
Fausto: Então é melhor encontrar uma fórmula.
Alexandra: Assim, é melhor colocarmos na máquina. Tem de dar um gráfico pois o tema é funções racionais.

A maior parte dos alunos demonstrou ter algumas dificuldades em resolver a equação obtida em ordem a uma das incógnitas de modo a ser possível visualizar o gráfico da função. Por exemplo, o *grupo 2*, após várias tentativas, obteve uma expressão algébrica errada, por terem cometido alguns erros de cálculo ao tentar isolar uma das incógnitas.

Luísa: Então fica $A = P$.
Sónia: E isto vai dar $c = 2 + 2c / l$ ou $l = (2c + 2l) / c$.
Luísa: E agora temos que tentar igualar a uma incógnita!
Sónia: Não dá...
Julieta: Vamos experimentar a ver se dá ou não.
Luísa: Esquece, não dá.
Sónia: E se tentássemos através de uma inequação? Sabemos que o comprimento é maior do que a largura.
Luísa: E fica $c \geq (2c + 2l) / c$. E agora que fazemos a esta inequação?
Julieta: Tentámos resolvê-la? Eu não estou a conseguir resolver, e vocês?
Luísa: Eu também não. Não consigo pôr em ordem a uma incógnita.
Sónia: Esta será a nossa 2ª ideia rejeitada. Mas esperem aí, e se tentássemos novamente resolver a primeira equação em que igualámos a área ao perímetro?
Luísa: Podemos tentar...
Sónia: Então obtemos $c = 2 + 2 / l$. E agora é só ir à calculadora e ver as assimptotas e isso tudo.

Nesta fase da investigação, a maioria dos grupos pediu ajuda à professora para encontrar uma função que lhes permitisse encontrar todas as soluções da tarefa, como é o caso do *grupo 1*. Após várias tentativas, no intuito de resolver a equação $P = A$ em ordem a uma das incógnitas, os alunos pediram, então ajuda à professora.

Fausto: Ora bem: $c \times l = c + c + l + l$, isto dá, $c = (2c + 2l) / l$.
Professora: Sim está bem, mas tentem resolver em ordem a uma incógnita.
(Seguidamente a professora afastou-se do grupo)
Alexandra: Se calhar temos de por em evidência... mas não dá.
Fausto: Mas eu acho que deve ser mesmo por em evidência. Se calhar enganaste-te nos cálculos.
Júlia: Por mais que dermos voltas, voltamos à mesma fórmula. Vamos chamar a professora.
(A professora aproximou-se do grupo novamente)
Fausto: O que temos de fazer para por o c em evidência?
Professora: Têm que por em evidência... E depois têm de fazer outra coisa... a divisão de polinómios.
(A professora volta a afastar-se do grupo para poderem pensar)
Elisa: Pois. Assim ficamos com a equação das tarefas anteriores e assim é mais fácil para nós vermos como varia a função.
Júlia: Então a expressão é: $c = 2l / (l - 2)$. Ou seja, pela divisão dos polinómios ... $c = 2 + 4 / (l - 2)$.
Alexandra: Colocamos na máquina e dá... uma hipérbole onde cada valor de x e de y dá os valores que queremos.

O *grupo 3* tentou também encontrar a expressão analítica da função em que o perímetro é igual à área, verificando-se, este facto, pela análise da discussão em que os alunos tentam construir os seus argumentos de forma a validá-la.

Célia: Então o perímetro é numericamente igual à área.
Raul: x é o comprimento e y é a largura.
Célia: $A = x.y$ e $P = 2x + 2y$. E depois pomos que $A = P$ ...
Raul e Margarida: ... agora igualamos umas à outra.
Raul: $2x + 2y = xy$ e agora colocamos em ordem a y .
Célia: Mas temos que pôr em evidência.
Raul: Já está. Fica $y = (2x + 2y) / x$.
Célia: Temos que pôr em evidência.
Raul: Pois.
Margarida: Fica $2x + y(2 - x) = 0$ ...
Raul e Célia: ... e depois passamos para o outro membro e fazemos o gráfico da função $f(x) = -2x / (x + 2)$.

Após terem encontrado a função que descrevia a situação proposta, todos os grupos, nomeadamente o *grupo 1*, começou a testar com a calculadora gráfica, se os valores encontrados no início da investigação eram válidos e também se eram as únicas soluções da tarefa.

Elisa: Vamos confirmar. Vamos à tabela e vemos um valor para x e o seu correspondente y e vemos se dá a área e o perímetro igual.
Alexandra: Podemos usar os que achamos (4 e 4), substituir na função e ver se dá.
Júlia: Sim dá. Dá 16=16.
Elisa: Então a expressão está correcta.
Fausto: O que temos de fazer agora, então?
Alexandra: Estudar a função. As assimptotas são as duas 2. Então o domínio é $]2, +\infty[$ e o contradomínio também.

Quando a Júlia, do *grupo 1* concluiu que para $x = 4$ e $y = 4$ o perímetro era igual à área, os colegas concordaram com o resultado e passaram de imediato a outras *conclusões.* No final da investigação, confirmaram que as soluções que tinham encontrado inicialmente eram as únicas soluções possíveis.

Júlia: Mas aqui pede os números naturais não é?
Elisa: Sim. Assim, só podemos ver no primeiro quadrante onde todos os números são positivos.
Fausto: O domínio fica então $IN \setminus \{1,2\}$. E o contradomínio também.
Elisa: Falta-nos ver se encontramos mais números que sejam válidos para o rectângulo.
Júlia: Na tabela já vi até ao $x = 100$ e não encontrei nenhum em que os dois sejam naturais.
Alexandra: Tem o -2 e o 1. Mas é negativo, por isso não dá.

A grande maioria dos alunos argumentou que como a função tinha duas assimptotas, uma vertical de equação $x = 2$ e outra horizontal de equação $y = 2$ e atendendo às dimensões do rectângulo corresponderem números naturais, as três soluções encontradas eram as únicas que verificavam as condições dadas.

A calculadora gráfica

Nesta tarefa os alunos só passaram a utilizar a calculadora gráfica quando descobriram que tinham de provar os resultados obtidos para todos os rectângulos, em que o perímetro era numericamente igual à área. Após os grupos terem encontrado a expressão analítica da função racional que modelava a tarefa dada, passaram a utilizar a calculadora para poderem efectuar o estudo do gráfico da função.

Contributos

Nesta tarefa, para os alunos conseguirem provar que as soluções desta investigação eram apenas três, foi necessário e imprescindível a utilização da calculadora gráfica, de forma adequada e crítica. O trabalho desenvolvido pelo *grupo 3* evidenciou que, em todos os momentos da exploração da tarefa os alunos utilizaram a calculadora gráfica, inclusive no momento em que tentaram efectuar o estudo da função que permitia encontrar todas as soluções.

Raul: As assimptotas da função são $x = 0$ e $y = 0$.
Célia: Só temos de encontrar valores naturais.
Raul: Não podemos considerar negativos. Podemos também estudar a função.
Célia: Vamos ver ao *table*.
Raul: Só os números que correspondem.
Célia: Dá então o (3,6), (4,4) e (6,3).

Note-se que os alunos recorrem ao *menu table* para que de uma forma mais rápida conseguissem encontrar as soluções à tarefa. É também de salientar que, sem a visualização da representação gráfica da função tornava-se difícil para os alunos tentar encontrar as soluções pedidas. O *grupo 2* também referiu, na discussão desenvolvida durante o trabalho de grupo, que para determinar os valores inteiros correspondentes às dimensões do rectângulo, em que o perímetro era igual à área, foi necessário recorrer ao *menu table*, da calculadora gráfica.

Luísa: Agora temos que ir à calculadora e ver quais são os valores inteiros.
Sónia: Tenho que ir à tabela, não é?

Luísa: Sim. Tens que ver quais são os valores inteiros que satisfazem as condições dadas no enunciado.
Julieta: O x representa a largura e o y representa o comprimento.

Alguns grupos tiveram dificuldades em provar porque é que só existiam três soluções, no entanto, houve casos em que com o auxílio da calculadora gráfica e das suas potencialidades, quer ao nível gráfico quer ao nível de tabela, conseguiram chegar a conclusões para alguns casos considerados.

Dificuldades

No decorrer desta tarefa não houve evidências de dificuldades dos alunos no manuseamento da calculadora gráfica, pois já tinham realizado duas tarefas anteriores, em que as lacunas que existiram foram resolvidas.

5.3.2. Discussão na turma

A discussão na turma sobre esta tarefa decorreu apenas na segunda parte de uma aula de noventa minutos.

A argumentação matemática

Nesta tarefa os alunos, contrariamente ao que a professora previra, demoraram mais tempo e tiveram mais dificuldades em desenvolver a investigação. No entanto, os resultados obtidos em termos de desenvolvimento da argumentação matemática foram mais notórios e interessantes dos que foram evidenciados nas anteriores tarefas.

Formulação e teste de conjecturas

A professora iniciou a discussão sobre a tarefa, tentando que todos os alunos se concentrassem nas conclusões, a que cada um dos grupos tinha chegado. Começou, como nos casos anteriores, por escrever no quadro interactivo o enunciado da tarefa. De seguida, incentivou os alunos a explicar os seus raciocínios e a referir quais foram as suas conjecturas, durante o desenvolvimento dos trabalhos de grupo, sobre a tarefa em estudo.

Professora: Vamos lá iniciar a discussão. Estejam atentos... Nesta tarefa é proposto que descubram as dimensões de um rectângulo cuja área seja igual ao perímetro e cujos valores sejam números naturais...Digam-me então como é que pensaram?

Elisa: Nós fizemos por tentativa erro...Experimentamos com vários valores para x e para y. Só depois chegamos à expressão do perímetro igual à área.
Maria: Eu fiz um sistema...
Professora: A Maria diz que começou com um sistema... Fizeste um sistema. Então queres vir aqui ao quadro mostrar como é que vocês pensaram.

Nesta fase inicial da discussão, os alunos limitaram-se a referir quais foram as primeiras conjecturas formuladas na fase de apropriação da tarefa. Maria, referiu que a sua conjectura inicial consistiu em construir um sistema (fig.50), no qual considerou duas equações, uma em que a área de um rectângulo era igual a um valor x e a outra relativamente ao perímetro igualando à mesma incógnita x.

$$\begin{cases} c \times \ell = a \\ 2\ell + 2c = a \end{cases}$$

Figura 50. *Flipchart* A da tarefa 3 escrito por Maria

Enquanto a aluna escreveu no quadro, a professora foi referindo o que observou em cada um dos grupos na fase inicial da investigação. De seguida, sugeriu a Maria, que explicasse a toda a turma, o porquê de ter iniciado a investigação com uma conjectura que consistia num sistema de duas equações e três incógnitas.

Professora: Portanto, uma das situações que eu cheguei a observar ao percorrer todos os lugares foi que a maioria de vocês começou a pensar por tentativa erro.
(...)
Professora: Então a Maria diz que começou com um sistema. E a partir daqui...
Maria: Fomos dando valores.
Raul: Substituímos as incógnitas por diferentes valores ...
Dora: O comprimento vezes a largura tinha que ser igual a um valor que tinha que ser igual a duas vezes o comprimento mais duas vezes a largura.
Raul: Atribuímos então valores às incógnitas, comprimento e largura.
Professora: A ideia era exactamente essa. Iam então substituindo os valores. E depois...A Maria diz que fizeram várias tentativas...
Vitória: Mas havia casos que não dava certo.

Vitória, a determinada altura da discussão referiu que a conjectura que o seu grupo formulou consistia em considerar $c \times l = 2c + 2l$ e posteriormente a dar valores aleatórios às incógnitas c e l, de modo que, a equação fosse uma proposição verdadeira. A maioria dos alunos, formularam esta conjectura e tentaram testá-la através do método de tentativa erro, mas aperceberam-se que, havia casos em que a equação não era válida. Entretanto, Elisa, pediu à professora para dizer qual foi a fórmula que o seu grupo obteve, após várias tentativas para encontrar uma função, que modelasse a tarefa proposta.

Elisa: Professora, posso agora dizer a fórmula que nós fizemos...

A professora, de imediato, propôs à aluna que escrevesse no quadro interactivo a conjectura formulada pelo seu grupo. Enquanto a aluna escrevia a sua conjectura, alguns alunos manifestaram que tinham formulado a mesma conjectura que o grupo de Elisa, e apresentaram os argumentos, sobre as estratégias de raciocínio seguidas.

Sónia: Nós também fizemos assim.
Professora: Vocês também fizeram assim? Na primeira fase do raciocínio...
Sónia: Sim, na primeira fase...
Cristina: Consideramos primeiro a área 10 e o perímetro 10. E verificamos que não era possível encontrar valores inteiros para o comprimento e para a largura.
Raul: Os valores que demos ao comprimento e à largura, atribuímos a x e y. E depois seria mais fácil calcular.
Júlia: Nós calculamos em ordem a c e a l. O comprimento e a largura.
Raul: É a mesma coisa. E depois calculando em ordem a x ou a y obtivemos a mesma expressão...

Entretanto a aluna terminou de escrever no quadro o raciocínio do seu grupo de forma a encontrar uma expressão que relaciona-se o perímetro e a área. De seguida, Elisa tentou provar a conjectura realizada pelo seu grupo. Nas restantes conjecturas formuladas durante a discussão da tarefa, verificou-se que os alunos sentiram a necessidade de passar da conjectura à prova.

Da conjectura à prova

Quando Elisa se dirigiu ao quadro interactivo para explicar a conjectura formulada pelo seu grupo (fig. 51), que consistia em igualar a fórmula do perímetro de um rectângulo à sua área, a aluna tentou provar analiticamente como é efectuou o seu raciocínio utilizando, para tal, argumentos matematicamente correctos.

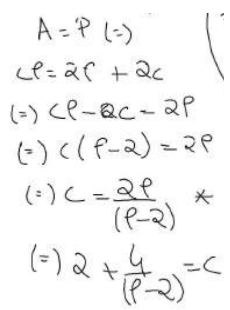


Figura 51. *Flipchart* B da tarefa 3 escrito por Elisa

Os argumentos apresentados por Elisa, após o que escreveu no quadro interactivo, foram com a intenção de provar que a conjectura formulada pelo seu grupo estava correcta.

Professora: Então como é que fizeste?
(A aluna apontando para o quadro interactiva afirma)

Elisa: Nós chegamos aqui $c = 2l/(l-2)$ ...E então tivemos que ir buscar uma matéria que demos o ano passado, que é a divisão de polinómios...E depois chegamos a isto...
Professora: Fizeram então a divisão dos dois polinómios e...
Elisa: E chegamos a $2+4/(l-2)$. Temos assim, uma função da família igual à que fizemos nas outras tarefas.
Raul: Falta igualares a c.
(A aluna ao escrever tinha-se esquecido de escrever a equação completa)
Professora: E então e depois... Que conclusão tiraram dessa expressão ...
Elisa: A partir desta expressão...Pusemos na máquina e verificamos indo à tabela...
...ver quais eram os únicos valores positivos que davam.

Entretanto, para realmente provar que a expressão analítica encontrada era a única que modelava a tarefa dada, Elisa utilizou a calculadora gráfica, instalada no quadro interactivo e argumentou que se tratava de uma função pertencente à família de funções, estudada na tarefa anterior. No entanto, alguns alunos referiram que introduziram a função na calculadora sem dividirem os polinómios, mas que obtiveram os mesmos resultados.

Elisa: Sim, mas ao dividir os polinómios, ficava a fórmula correcta de como fizemos nas outras tarefas. A ideia era chegar à expressão $a+b/(cx+d)$ da última tarefa.
Professora: Exacto... E então...
Dora: Mas $c = 2l/(l-2)$ também dava...
Professora: Exacto.
Elisa: Depois fomos à tabela ...
Professora: Foram à tabela, e depois...
Elisa: Verificamos que a assimptota era 2... Como se vê na tabela ... porque o valor de y dá erro. Verificamos que os único números que davam naturais eram o (3,6), o (6,3) e o (4,4) ... Se formos para baixo e continuamos com a tabela verificamos que não há mais...

A tabela considerada por Elisa, só contemplava valores de 1 até 10 e estes eram insuficientes para conseguirem efectuar uma prova. No entanto, a aluna posteriormente salientou que experimentaram com valores compreendidos entre 1 e 150.

Professora: Experimentaram com mais valores?
Elisa: Experimentamos até 150...
David: A partir de 10 já não existem mais...
Professora: A partir do 10 diz aqui o David que ...
David: É impossível...
Professora: Porquê?
David: Porque não dá números naturais simultaneamente para x e para y.

Entretanto a professora, mostrou utilizando a calculadora gráfica do quadro interactivo, a tabela e os diferentes valores que a função podia tomar. Note-se que já se tinha efectuado a alteração do valor máximo que a tabela, na calculadora gráfica, podia tomar. De seguida, a professora propôs aos alunos que revissem quais foram as conclusões a que chegaram após a visualização e análise do gráfico da função, na calculadora gráfica.

> *Professora:* Agora, o que é que se faz em relação a esta função... Esta função é da família da que nós estudamos... da última. E agora que características é que ela tem? Que conclusões é que podem tirar?
> *Elisa:* As mesmas conclusões que tiramos na outra... a última tarefa que fizemos.
> *Professora:* Então que conclusões obtiveram?
> *Elisa:* Tínhamos que calcular as assimptotas e depois verificamos que têm duas ...neste caso dão as duas iguais a dois.
> *Professora:* Exacto...
> *Elisa:* E verificamos também o domínio e o contradomínio. Verificamos que como nós só queríamos números positivos, verificamos que o domínio e o contradomínio não são todos os números reais, mas são números naturais excepto o 1 e o 2. Porque nós queríamos números inteiros naturais.
> *Professora:* Ouviram o que a Elisa disse... Concordam com o que a Elisa está a dizer? Ela disse que tanto o domínio e o contradomínio têm de ser números naturais excepto o 1 e o 2... Mas, vocês não chegaram logo directo ... Inicialmente que domínio e contradomínio consideraram?
> *Raul:* Consideramos *IR* excepto as assimptotas...
> *Alexandra:* Pois foi...
> *Professora:* O *IR* excepto as assimptotas e depois particularizaram para...
> *Raul:* Os números naturais excepto o 1 e o 2.

Nesta parte da discussão, Elisa, formulou uma conjectura que considerava que o domínio e o contradomínio da função que modela esta tarefa, podiam ser todos os números naturais à excepção do 1 e do 2. A aluna, na discussão tomou a iniciativa de explicar como é testou a sua conjectura, apresentando os argumentos que achava necessários para a validar.

> *Elisa:* Podemos concluir na mesma que o domínio e o contradomínio são iguais. As equações das assimptotas verticais e horizontais são ... $x = 2$ e $y = 2$.
> *Professora:* Neste caso em particular é verdade... as assimptotas horizontais e verticais são iguais. E depois?
> *Raul:* A partir daí já tínhamos a função e fizemos o seu estudo. É assim, no geral...
> *Professora:* E que função é que obtiveram...

Entretanto a professora desenhou no quadro interactivo a função obtida (fig. 52), tentando assim fazer uma síntese dos resultados alcançados pelos alunos.

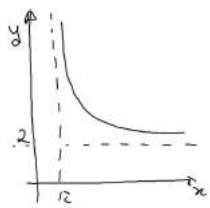


Figura 52. *Flipchart* C da tarefa 3 escrito pela professora

Posteriormente, a professora pediu para que mais alguns alunos se manifestassem, para que todas as conclusões fossem consideradas, na discussão em grande grupo.

Bruna: Cada grupo pode ter começado de forma diferente, mas todos chegamos à mesma conclusão!
Professora: Exactamente.
Rafaela: Nós fizemos de outra forma...
Aurora: A Elisa fez a divisão de polinómios...e obteve uma função que era parecida com aquela que nós obtivemos. E chegamos às mesmas conclusões...
Professora: Mas, se fizessem sem a divisão de polinómios chegavam às mesmas conclusões. Mais alguma informação? Mais alguma coisa?
Sónia: Professora, a nós não nos deu essa função!
Professora: Não?
Sónia: Deu $2+2/l=c$ ...
Professora: Então diz-me lá... Diz-me como é que chegas-te a essa função? Vem aqui ao quadro explicar como é que pensas-te.

De imediato, Sónia dirigiu-se ao quadro interactivo, mudou de página e começou a escrever o seu processo de raciocínio que deu origem à conjectura formulada pelo seu grupo.

Professora: E então?
Sónia: Faço tudo desde o inicio para eles verem?
Professora: Sim.

Entretanto, Sónia escreveu a expressão analítica obtida pelo seu grupo (fig. 53) e, a forma como efectuaram o raciocínio.

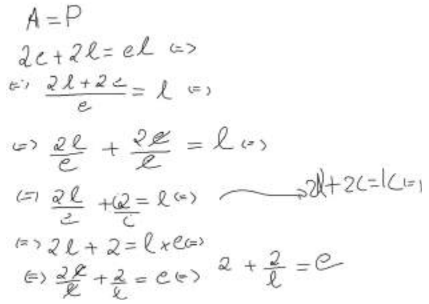


Figura 53. *Flipchart* D da tarefa 3 escrito por Sónia

De seguida, a professora chamou a atenção a todos os alunos para que verificassem, se a expressão analítica encontrada por Sónia estava correcta ou se tinha de ser alterada. Os alunos de imediato manifestaram-se, na tentativa de validar ou de refutar a conjectura e verificaram que a Sónia, no seu raciocínio, teve um erro de cálculo matemático devido a não ter dado o mesmo denominador, a todos os termos da equação.

Professora: Estejam atentos. Vejam o que a Sónia esta a fazer e digam se acham que está correcto. Vejam se podem pensar desta forma, ou não?
Raul: Porque é que cortas-te o parâmetro l?
Fausto: Professora uma solução é (4,4). Se o comprimento for quatro, ou seja $c=4$, temos $l=1/2+2$ que não é igual a 4.
Aurora: Professora, se substituir o l por 3, não dá...
Raul: Tens agora de raciocinar com esta nova função...
Professora: Fica l a dividir por 3 e...

Célia: Professora, eu acho que, não se pode passar para a equação seguinte sem dividir todos os termos pelo mesmo valor.
Elisa: Devem ser dados a todos os termos o mesmo denominador...
Professora: Digam então o que é que argumentavam neste caso... Digam, Cristina ou Elisa, tanto faz...
Célia: Temos de ter...

A professora sugeriu então a Célia, para ir ao quadro interactivo mostrar o que é que era passível de estar mal, no processo de raciocínio da Sónia. Célia, argumentou então que, o erro das alunas foi o de não ter atribuído a todos os termos da equação o mesmo denominador, antes de a simplificarem.

Célia: Neste passo $2l/c+2=l$, devia de ter sido dado o mesmo denominador...
Raul: Mas ela cortou em cima!
Professora: O que é que acontece? A Sónia simplificou a fracção $2c/c$, mas ao mesmo tempo, ficou no termo anterior com a incógnita c.
Célia: Ela devia ter passado o c para o segundo membro.
Elisa: Ela se passar o c para baixo, para o denominador, já não ia dar igual...
Professora: Toda a gente concorda com o que foi dito? Então, vamos lá ... O que é que se passou? Mediante o que a Célia e a Elisa disseram ao simplificar a incógnita c...

Após Célia ter descoberto o erro de cálculo da colega, por sugestão da professora dirigiu-se ao quadro interactivo para reformular a equação. Deste modo foi assim reformulada a conjectura do grupo de Sónia, depois da tentativa evidenciada pela aluna em prová-la.

Posteriormente, a determinada altura da parte final da discussão na turma, Célia referiu que o seu grupo de trabalho formulou uma conjectura que considerava que, se a função que modela a tarefa em estudo era do tipo $f(x)=a+bx/(cx+d)$ e o valor do parâmetro a era igual a zero então a função resultante tinha uma assimptota horizontal de equação $y=b/c$. Apesar desta conjectura parecer vir um pouco a despropósito na discussão, a professora entendeu que a deveria testar, em conjunto com os alunos, para verificar se era válida ou se deveria ser reformulada ou rejeitada. É de salientar, que neste momento da discussão alguns alunos referiram que a função que modelava a função em estudo era $c=2l/(l-2)$ e outros foram um pouco mais longe, pois dividiram os polinómios e obtiveram a função $c=2+4/(l-2)$.

Professora: Deixem ouvir agora a Cristina...
Célia: A Elisa fez a divisão de polinómios...mas nós não tínhamos feito. Trabalhando com a expressão anterior $c=2l/(l-2)$ tínhamos chegado a uma conclusão que a assimptota horizontal era $y=b/c$...
Professora: A assimptota horizontal era $y=b/c$? Neste caso, ou no anterior?
Célia: No anterior...

Professora: O que é que vocês acham? A assimptota horizontal seria $y = b/c$ ...
Célia: Sim. Consideramos o $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$ e $d = -2$ ...
Raul: Escrevemos esta função e atribuímos um tipo. Temos... Nós pegamos na função do tipo... a mais geral e ...
Professora: Continuem ...

Entretanto, Célia escreveu no quadro interactivo os valores que considerou e registou também qual a assimptota que obtiveram (fig. 54).

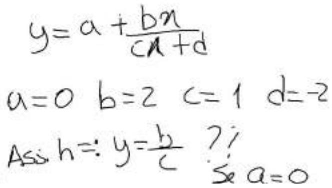


Figura 54. *Flipchart* E da tarefa 3 escrito por Célia

Neste momento da discussão, Célia começou a ficar com dúvidas relativamente à conjectura que o seu grupo tinha formulado. No entanto, não conseguia encontrar argumentos para a validar ou para a refutar.

Célia: Podíamos chegar a esta conclusão?
Professora: Tínhamos de experimentar... Aí só mesmo indo à máquina de calcular e verificar .... Vocês experimentaram com vários valores?
Raul: Sim...
Professora: Já sabem que para provar... para chegar à conclusão têm de fazer várias conjecturas e consideraram vários exemplos... se não encontrarem nenhum contra-exemplo é porque é valido...
Cristina: É possível o x estar em numerador?
Professora: Se vocês dividirem o polinómio bx por $cx + d$, obtêm.... Vocês dividiram?
Raul: Não, nós mantivemos assim.

Na discussão é evidente que os alunos construíram a sua conjectura em comparação com a função $c = 2l/(l-2)$, obtida para determinar as possíveis soluções à tarefa. O facto é que, encontraram uma nova família de funções $f(x) = bx/(cx+d)$, que era diferente das famílias estudadas nas tarefas 1 e 2, e verificaram que tinha assimptota horizontal de equação $y = b/c$.

Professora: Vocês primeiro têm que ter dividir o polinómio bx por $cx + d$ e depois vêm o que é que obtêm...e a partir desse momento somam ao valor de a. Depois a assimptota horizontal é esse valor de a mais qualquer coisa... Portanto $y = b/c$ não me parece ser a assimptota horizontal. Acham que sim ou não? Entendem o que eu estou a dizer? O facto é que eles encontraram uma nova família, que não tem nada a ver com as nossas famílias anteriores... Porque as nossas anteriores foram do tipo $f(x) = a + b/(cx+d)$ ...

Como durante a discussão, a turma não se manifestou a professora resolveu explicar como é que deveriam proceder para verificar a validade da conjectura formulada (fig. 55). Começou por dividir bx por $cx+d$, pelo método da divisão inteira de polinómios.

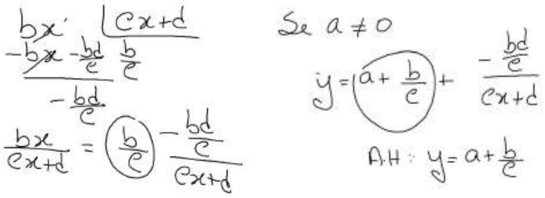


Figura 55. *Flipchart* F *da tarefa 3* escrito pela professora

Neste momento da discussão, os alunos estavam um pouco confusos pois usualmente não gostam de trabalhar com expressões com muitas incógnitas. Entretanto, a professora chegou finalmente à expressão pretendida depois de ter efectuado a divisão dos polinómios e concluiu que $bx/(cx+d)$ era igual a $b/c+(-bd/c)/(cx+d)$.

> *Professora:* E agora eu pergunto, podemos afirmar que $y=b/c$ é a equação da assimptota horizontal, para a família considerada pelo grupo da Célia?
> *Raul:* Se $a=0$ então a família reduz-se a $bx/(cx+d)$.
> *Professora:* E assim, fica só o que obtivemos anteriormente. E realmente a assimptota horizontal pode ser $y=b/c$. No entanto, caso contrário, se $a \neq 0$ então a assimptota horizontal é ...
> *Raul:* $y=a+b/c$.

Para concluir o raciocínio efectuado, a professora por fim, explicou todo o processo com recurso ao quadro interactivo, que têm como uma das suas potencialidades, a possibilidade de voltar a visualizar o que ficou registado nas páginas anteriores, podendo assim, explicar novamente todo o processo. Depois do esclarecimento e de toda a turma ter entendido a necessidade da prova da validade da conjectura construída pelo grupo de Célia e de Raul, a professora deu por terminada a discussão na turma.

A calculadora gráfica

Nos trabalhos de grupo, no momento de apropriação da tarefa, a maioria dos alunos não sentiu a necessidade de recorrer à calculadora gráfica, visto terem primeiro tentado descobrir as soluções da tarefa, por tentativa erro. No entanto, quando no decorrer da investigação descobriram uma função que permitia determinar todas as possíveis soluções, os alunos recorreram por diversas vezes à calculadora gráfica para testar os valores encontrados inicialmente. Novamente, a calculadora gráfica foi uma mais-valia nesta investigação, pois ajudou os alunos a provar as suas conjecturas e caso contrário a verificar se tinham que as reformular ou rejeitar.

Contributos

Novamente, os contributos da utilização da calculadora gráfica foram vários, nomeadamente, quando foi necessário verificar qual a representação gráfica da função obtida de acordo com as condições da tarefa e quando se tentaram encontrar as suas possíveis soluções.

Relativamente à representação gráfica da função, Elisa a determinado momento da discussão, referiu que encontrou a partir da divisão de polinómios, a função $f(x)=2+4/(l-2)$ que modelava a tarefa dada e que recorreu à calculadora gráfica para visualizar o gráfico da função determinando, assim, as possíveis soluções da tarefa.

Professora: Fizeram então a divisão dos dois polinómios e...
Elisa: E chegamos a $2+4/(l-2)$. Temos assim, uma função da família igual à que fizemos nas outras tarefas.
Raul: Falta igualares a c.
Professora: E então e depois... Que conclusão tiraram dessa expressão ...
Elisa: A partir desta expressão...Pusemos na máquina e verificamos indo à tabela que os únicos valores positivos que davam...

A aluna recorreu à calculadora gráfica instalada no quadro interactivo e, depois de digitar a expressão analítica da função, recorreu ao *menu graph* para visualizar o seu gráfico (fig. 56).

Figura 56. Imagem A da calculadora gráfica na tarefa 3

Posteriormente, foi utilizado o *menu table*, da calculadora gráfica (fig. 57), para ser possível verificar quais eram as possíveis soluções à tarefa 3 e se existiam apenas três, nomeadamente os pares ordenados (4,4), (3,6) e (6,3).

Figura 57. Imagem B da calculadora gráfica na tarefa 3

Para verificar se existiam apenas três soluções a professora propôs a Elisa atribuir à incógnita x valores inteiros maiores, de modo a poder provar a sua conjectura era válida.

Elisa: Depois fomos à tabela ...
Professora: Foram à tabela, e depois...
Elisa: Verificamos que a assimptota era 2... Como se vê na tabela ... porque o valor de y dá erro. Verificamos que os único números que davam naturais eram o (3,6), o (6,3) e o (4,4) ... Se formos para baixo e continuamos com a tabela verificamos que não há mais...
Professora: Experimentaram com mais valores?
Elisa: Experimentamos até 150...

A visualização da tabela tornou-se um contributo para o desenvolvimento da argumentação matemática dos alunos da turma, quer para descobrir as soluções da tarefa como para verificar, por exemplo, que a função tinha uma assimptota para $x = 2$, pois para esse valor a calculadora gráfica dava *error*, ou seja, erro. A calculadora gráfica contribui também para que os alunos se sentissem estimulados a construir argumentos passíveis de ser validados, por todos os elementos da turma.

Dificuldades

Nesta tarefa 3, apenas uma dificuldade na utilização da calculadora gráfica foi encontrada, nomeadamente quando Raul referiu que para $x = 269854$ o valor de era $y = 2$.

Raul: Professora altere o valor de x para 269854.
Os alunos: Dá 2?
Raul: Este valor descobri em casa...
Professora: Porque é que será que a máquina dá este valor para y? O Raul experimentou 269854 e dá 2... O que é que a calculadora gráfica tem tendência a fazer?
Elisa: A arredondar...
Raul: Exactamente. A aproximar...

Como forma de validar a conjectura de Raul, recorreu-se à calculadora gráfica para se verificar qual era a imagem do objecto $x = 269854$, confirmando-se o que o aluno tinha referido (fig. 58).

Figura 58. Imagem C da calculadora gráfica na tarefa 3

No excerto dado anteriormente, da discussão desenvolvida na turma sobre a conjectura de Raul, é evidente que os alunos entenderam que a calculadora gráfica, por vezes, tem tendência a arredondar alguns valores e daí se verificar que para $x = 269854$ a imagem era

$y = 2$. No entanto, o resultado dado pela calculadora gráfica pode, nesta situação, levar o aluno a formular conjecturas erradas devido a uma interpretação incorrecta de um resultado, dado no seu visor.

5.3.3. Relatório e reflexão

O relatório individual, da tarefa 3, foi entregue pelos alunos aproximadamente uma semana após a discussão na turma. Para a elaboração dos relatórios, os alunos deviam realizar uma descrição pormenorizada de todo o processo de investigação. No final dos relatórios, tinham também de efectuar uma apreciação crítica e autocrítica do trabalho desenvolvido em grupo. Os alunos da turma em estudo, ao elaborarem os relatórios escritos revelaram, como nos anteriores, algum cuidado na sua realização.

A argumentação matemática

Pela análise dos relatórios, verificou-se uma melhoria significativa na forma como os alunos argumentaram matematicamente relativamente às conjecturas que foram abandonadas e às que foram seguidas. Todos os alunos tentaram provar as conjecturas seguidas, tendo-se constatando que, alguns deles, estiveram muito perto de uma verdadeira prova matemática. A capacidade de argumentar matematicamente sobre o processo de resolução da tarefa foi evidente, em alguns casos.

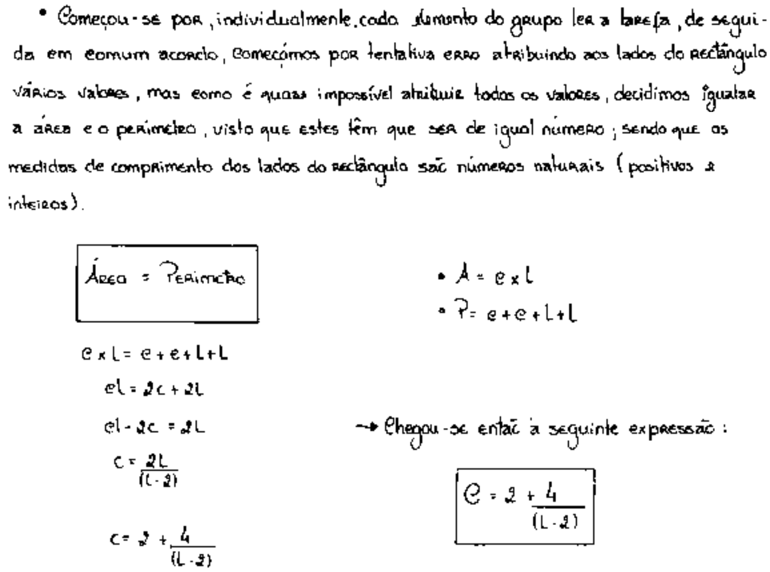
Formulação e teste de conjecturas

A forma como os alunos começaram a construir os relatórios foi muito diversificada. Por exemplo, Rafaela iniciou o seu relatório de uma forma rigorosa, referindo na introdução o modo como foi desenvolvida a investigação nesta tarefa (fig. 59).

1. **Tentámos perceber o que nos era proposto.**
2. **Chegámos a uma expressão geral do perímetro e da área.**
3. **Igualámos a expressão do perímetro à da área.**
4. **Atribuímos ao comprimento e à largura do rectângulo as letras x e y.**
5. **Resolvemos a equação em ordem a y.**
6. **Fizemos a representação gráfica das funções.**
7. **Consultamos a tabela da calculadora gráfica.**
8. **Registámos todas as informações que obtivemos da representação gráfico, que estão apresentadas em baixo.**
9. **Tirámos as conclusões dos nossos registos.**

Figura 59. Excerto A do relatório da tarefa 3 de Rafaela

Outra aluna, Júlia, iniciou o seu relatório argumentando sobre o processo de raciocínio desenvolvido pelo seu *grupo 1* na fase relativa à exploração inicial da tarefa, colocando apenas as conjecturas que foram seguidas (fig. 60).


• Começou-se por, individualmente, cada elemento do grupo ler a tarefa, de seguida em comum acordo, começámos por tentativa erro atribuindo aos lados do rectângulo vários valores, mas como é quase impossível atribuir todos os valores, decidimos igualar a área e o perímetro, visto que estes têm que ser de igual número; sendo que as medidas de comprimento dos lados do rectângulo são números naturais (positivos e inteiros).

$\boxed{\text{Área} = \text{Perímetro}}$

• $A = c \times l$
• $P = c + c + l + l$

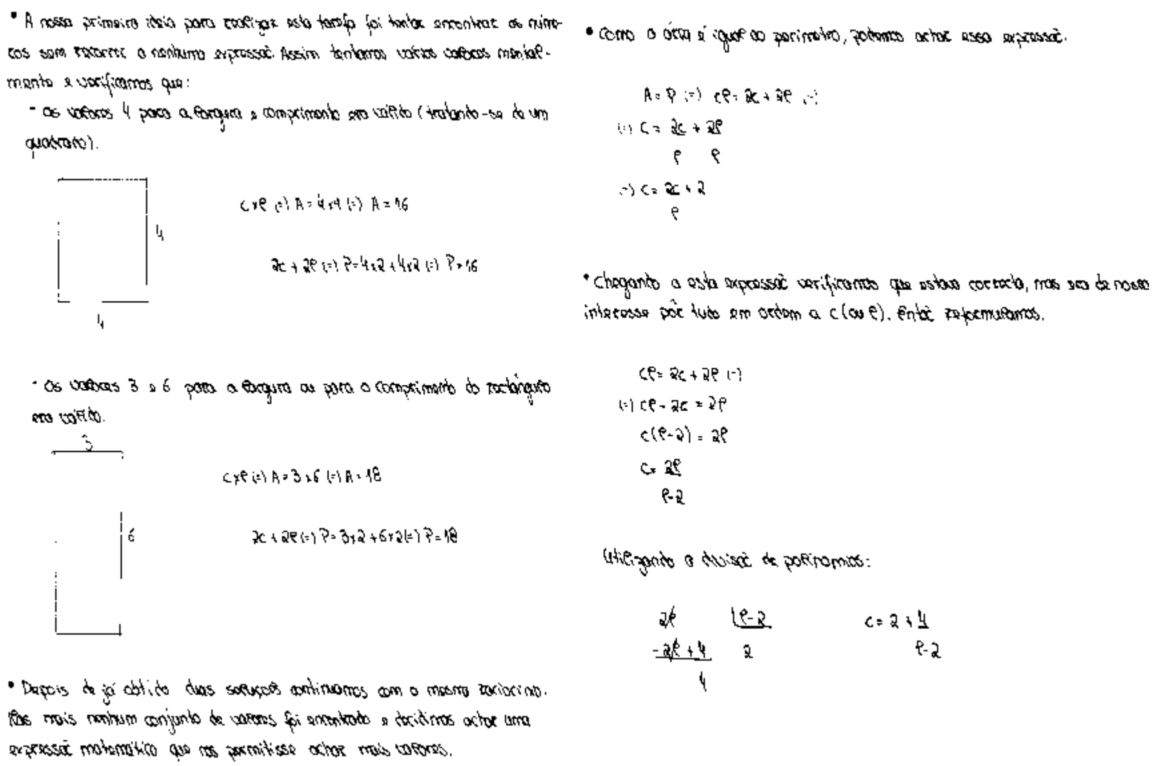
$c \times l = c + c + l + l$
$cl = 2c + 2l$
$cl - 2c = 2l$
$c = \frac{2l}{(l-2)}$
$c = 2 + \frac{4}{(l-2)}$

→ Chegou-se então à seguinte expressão:

$\boxed{c = 2 + \frac{4}{(l-2)}}$

Figura 60. Excerto do relatório da tarefa 3 de Júlia

Elisa, que pertencia ao mesmo grupo de trabalho de Júlia, iniciou o seu relatório referindo que o primeiro raciocínio efectuado foi por tentativa erro, visto ter começado por atribuir valores arbitrários ao comprimento e à largura do rectângulo de modo a que o valor do perímetro e da área fossem iguais (fig. 61). Posteriormente, formulou uma conjectura para que fosse possível encontrar todos os rectângulos que verificassem as mesmas condições.


• A nossa primeira ideia para resolver esta tarefa foi tentar encontrar os números sem recorrer a nenhuma expressão. Assim tentámos vários valores mentalmente e verificamos que:
- os valores 4 para a largura e comprimento era válido (tratando-se de um quadrado).

$c \times l \Leftrightarrow A = 4 \times 4 \Leftrightarrow A = 16$

$2c + 2l \Leftrightarrow P = 4 \times 2 + 4 \times 2 \Leftrightarrow P = 16$

- os valores 3 e 6 para a largura ou para o comprimento do rectângulo era válido.

$c \times l \Leftrightarrow A = 3 \times 6 \Leftrightarrow A = 18$

$2c + 2l \Leftrightarrow P = 3 \times 2 + 6 \times 2 \Leftrightarrow P = 18$

• Depois de já obtido duas soluções continuamos com o mesmo raciocínio. Mas mais nenhum conjunto de valores foi encontrado e decidimos achar uma expressão matemática que nos permitisse achar mais valores.

• Como a área é igual ao perímetro, podemos achar essa expressão.

$A = P \Leftrightarrow cl = 2c + 2l \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c = \frac{2c}{l} + \frac{2l}{l}$
$\Leftrightarrow c = \frac{2c}{l} + 2$

• Chegando a esta expressão verificamos que estava correcta, mas era do nosso interesse pôr tudo em ordem a c (ou l). Então reformulamos.

$cl = 2c + 2l \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow cl - 2c = 2l$
$c(l-2) = 2l$
$c = \frac{2l}{l-2}$

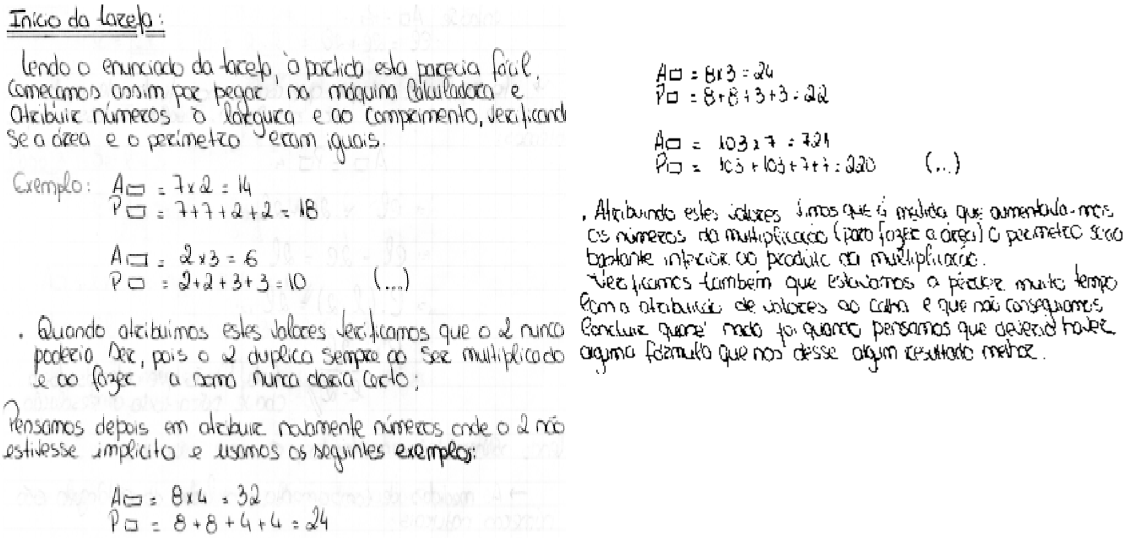
Utilizando a divisão de polinómios:

$2l \;|\; l-2$
$-2l+4 \quad 2$
4

$c = 2 + \frac{4}{l-2}$

Figura 61. Excerto do relatório da tarefa 3 de Elisa

Aurora, referiu no seu relatório que começou a investigação atribuindo valores aleatórios ao comprimento e à largura e foram verificando, por tentativa erro, quais os que estavam de acordo com as condições da tarefa (fig. 62).


Início da tarefa:

Lendo o enunciado da tarefa, à partida esta parecia fácil, Começamos assim por pegar na máquina Calculadora e Atribuir números à largura e ao comprimento, verificando se a área e o perímetro eram iguais.

Exemplo: $A_{\square} = 7 \times 2 = 14$
$P_{\square} = 7+7+2+2 = 18$

$A_{\square} = 2 \times 3 = 6$
$P_{\square} = 2+2+3+3 = 10$ (...)

. Quando atribuimos estes valores verificamos que o 2 nunca poderia ser, pois o 2 duplica sempre ao ser multiplicado e ao fazer a soma nunca daria certo;

Pensamos depois em atribuir novamente números onde o 2 não estivesse implicito e usamos os seguintes exemplos:

$A_{\square} = 8 \times 4 = 32$
$P_{\square} = 8+8+4+4 = 24$

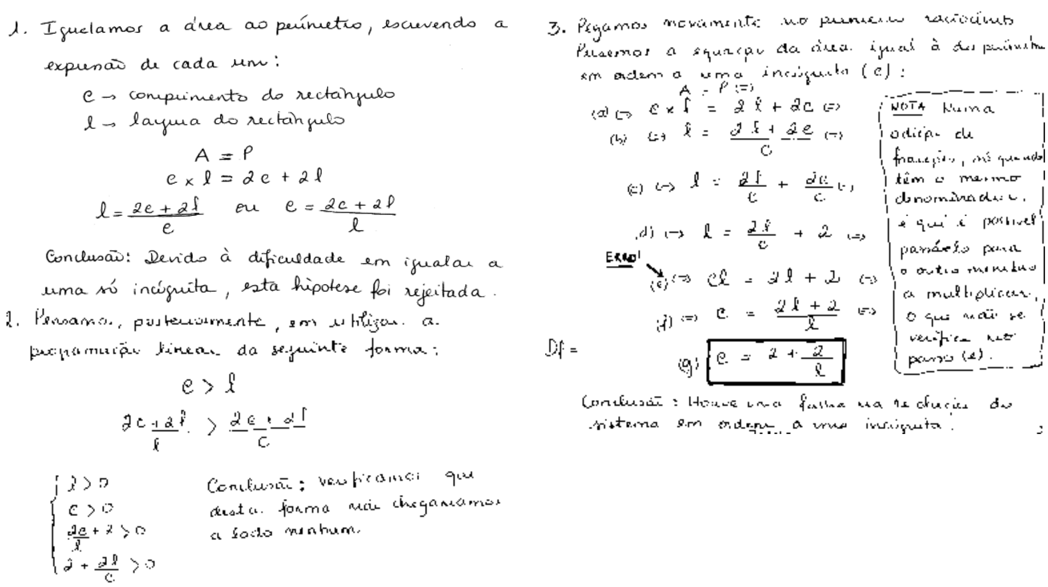
$A_{\square} = 8 \times 3 = 24$
$P_{\square} = 8+8+3+3 = 22$

$A_{\square} = 103 \times 7 = 721$
$P_{\square} = 103+103+7+7 = 220$ (...)

. Atribuindo estes valores vimos que à medida que aumentava-mos os números da multiplicação (para fazer a área) o perímetro seria bastante inferior ao produto da multiplicação.
Verificamos também que estavamos a perder muito tempo com a atribuição de valores ao calha e que não conseguiamos concluir qualquer nada foi quando pensamos que deveria haver alguma fórmula que nos desse algum resultado melhor.

Figura 62. Excerto A do relatório da tarefa 3 de Aurora

Por outro lado, Julieta referiu no seu relatório que no momento de apropriação da tarefa o seu *grupo 2* teve alguma dificuldade em desenvolver a investigação, pois inicialmente formularam várias conjecturas que tiveram que ser eliminadas visto ter cometido erros de raciocínio ao efectuar alguns dos cálculos quando tentaram encontrar a expressão analítica pretendida (fig. 63).


1. Igualamos a área ao perímetro, escrevendo a expressão de cada um:

$c \to$ comprimento do rectângulo
$l \to$ largura do rectângulo

$$A = P$$
$$c \times l = 2c + 2l$$
$$l = \frac{2c+2l}{c} \quad \text{ou} \quad c = \frac{2c+2l}{l}$$

Conclusão: Devido à dificuldade em igualar a uma só incógnita, esta hipótese foi rejeitada.

2. Pensamos, posteriormente, em utilizar a programação linear da seguinte forma:

$$c > l$$
$$\frac{2c+2l}{l} > \frac{2c+2l}{c}$$

$$\begin{cases} l > 0 \\ c > 0 \\ \frac{2c}{l} + 2 > 0 \\ 2 + \frac{2l}{c} > 0 \end{cases}$$

Conclusão: verificamos que desta forma não chegaríamos a lado nenhum.

3. Pegamos novamente no primeiro raciocínio. Passamos a equação da área igual à do perímetro em ordem a uma incógnita (c):

$A = P \Leftrightarrow$
(a) $\Leftrightarrow c \times l = 2l + 2c \Leftrightarrow$
(b) $\Leftrightarrow l = \frac{2l + 2c}{c} \Leftrightarrow$
(c) $\Leftrightarrow l = \frac{2l}{c} + \frac{2c}{c} \Leftrightarrow$
(d) $\Leftrightarrow l = \frac{2l}{c} + 2 \Leftrightarrow$
ERRO!
(e) $\Leftrightarrow cl = 2l + 2 \Leftrightarrow$
(f) $\Leftrightarrow c = \frac{2l+2}{l} \Leftrightarrow$
Df =
(g) $\boxed{c = 2 + \frac{2}{l}}$

NOTA: Numa adição de fracções, só quando têm o mesmo denominador, é que é possível passá-lo para o outro membro a multiplicar, o que não se verifica no passo (e).

Conclusão: Houve uma falha na resolução do sistema em ordem a uma incógnita.

Figura 63. Excerto A do relatório da tarefa 3 de Julieta

Posteriormente, Julieta referiu no seu relatório que teve que reformular a sua conjectura inicial e desta forma encontrou a expressão analítica, que lhe permitia encontrar as soluções (fig.64).

4. Tentamos igualar de novo a uma incógnita, ao vermos que era a única hipótese existente.

$$cl = 2c + 2l \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow cl - 2c = 2l \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c(l-2) = 2l \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{2l}{(l-2)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{c = 2 + \frac{4}{(l-2)}}$$

Função do tipo

$$c(u) = a + \frac{b}{cu+d}$$

Figura 64. Excerto B do relatório da tarefa 3 de Julieta

Um outro aluno, Raul iniciou o seu relatório de uma forma mais metódica referindo que o seu *grupo 3* iniciou a investigação formulando uma conjectura na qual consideraram $A=8$ e $P=8$, mas tiveram de a abandonar pois, na resolução de um sistema chegaram à conclusão que não tinha solução, devido a terem efectuado um erro no cálculo. Posteriormente, formularam uma outra conjectura na qual consideram $y=(-2x)/(-x+2)$, que posteriormente provaram ser verdadeira (fig. 65).

Introdução

Nesta tarefa de investigação pretende-se, através da utilização da calculadora gráfica, resolver questões dentro da temática Funções, mais concretamente Funções Racionais. Esta tarefa alicerça-se na realização de conjecturas de maneira a, depois de um estudo pormenorizado de vários e diferentes casos seja resolvido um problema com aplicação da funções racionais.

A investigação com recurso à calculadora gráfica tem como quarta tarefa resolver um problema relacionado com áreas e perímetros, procurando perceber qual a aplicação das funções racionais nestes problemas.

Para realizar a tarefa proposta foram efectuados diferentes e variados raciocínio de maneira a resolver o dito problema através das funções racionais.

Neste relatório encontram se os diferentes resultados bem como a sua exploração e estudo de forma às conjecturas tiradas serem validadas ou refutadas e assim poderem ser tiradas as conclusões acertadas.

São também apresentados os raciocínios levados, bem como aqueles que foram induzidos, embora erradamente, mas depois corrigidos com o aparecimento de casos comprovativos desse mesmo erro.

O problema em causa apresenta-nos a seguinte pergunta: pretende se descobrir quais os valores analíticos, naturais e inteiros que o comprimento e a largura possam tomar de maneira a que sua área e o seu perímetro tenham o mesmo valor.

Resultados

O primeiro raciocínio do grupo foi atribuir um valor quer à área quer ao perímetro do rectângulo e a partir daí tentar descobrir uma expressão analítica que pudesse estar relacionada com uma função. Assim temos:

- x - comprimento; y – largura
- A=8 e P=8

$$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ x\times y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2\left(\frac{8}{x}\right)=8 \\ y=\frac{8}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\frac{16}{x}=8 \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2+16}{x}=8 \\ \end{cases}$$

________, este raciocínio foi abandonado pois a resposta era impossível e inconclusiva, daí ter sido abandonado pelo grupo, apenas não foi continuado pois não revela qualquer importância para o nosso estudo e para a resolução do problema em questão.

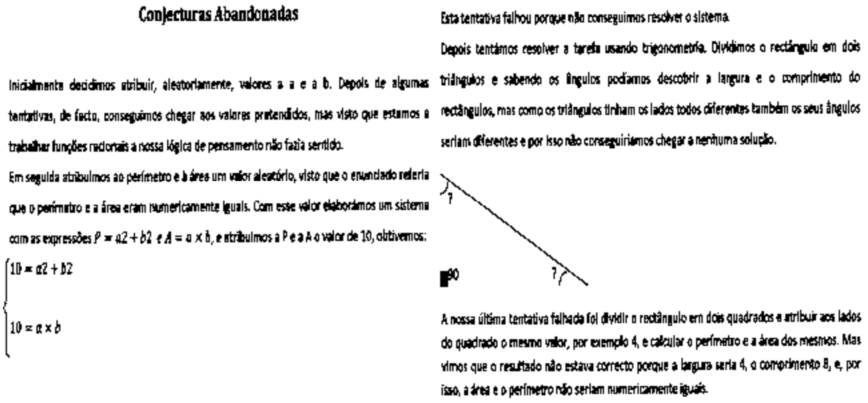
Com este último resultado o grupo decidiu adoptar outro raciocínio, melhor dito reformular o anterior de maneira a que seja possível, para isso não atribuiu qualquer valor à área ou perímetro, apenas as letras correspondentes ao comprimento e à largura, respectivamente x e y, de maneira a determinar uma expressão que possa expressar uma função racional relacionada com o problema proposto. Assim temos se.

- x – comprimento; y – largura
- $A = x \times y$
- $P = 2x + 2y$
- $A = P$
- $x \times y = 2x + 2y \Leftrightarrow 2x + 2y - xy = 0 \Leftrightarrow y(-x+2) + 2x = 0 \Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow y = \frac{-2x}{-x+2}$

Figura 65. Excerto A do relatório da tarefa 3 de Raul

É de salientar que os outros elementos do grupo de Raul, Célia e Margarida desenvolveram os seus relatórios da mesma forma.

Em todos os grupos foram várias as conjecturas abandonadas, tendo-se constatado que na sua grande maioria deveu-se a erros de cálculo, nomeadamente, ao resolver a equação obtida em ordem a uma das incógnitas ter obtido expressões para o perímetro erradas ($P=a^2+b^2$), ou ainda, tentar resolver a tarefa a partir de conceitos de trigonometria. Este caso verificou-se, particularmente, no trabalho desenvolvido pelo *grupo 4*. Relativamente às conjecturas abandonadas pelo *grupo 4*, Rafaela registou no seu relatório os raciocínios desenvolvidos (fig. 66).



Conjecturas Abandonadas

Inicialmente decidimos atribuir, aleatoriamente, valores a a e a b. Depois de algumas tentativas, de facto, conseguimos chegar aos valores pretendidos, mas visto que estamos a trabalhar funções racionais a nossa lógica de pensamento não fazia sentido.

Em seguida atribuímos ao perímetro e à área um valor aleatório, visto que o enunciado referia que o perímetro e a área eram numericamente iguais. Com este valor elaborámos um sistema com as expressões $P = a2 + b2$ e $A = a \times b$, e atribuímos a P e a A o valor de 10, obtivemos:

$$\begin{cases} 10 = a2 + b2 \\ 10 = a \times b \end{cases}$$

Esta tentativa falhou porque não conseguimos resolver o sistema.

Depois tentámos resolver a tarefa usando trigonometria. Dividimos o rectângulo em dois triângulos e sabendo os ângulos podíamos descobrir a largura e o comprimento do rectângulos, mas como os triângulos tinham os lados todos diferentes também os seus ângulos seriam diferentes e por isso não conseguiríamos chegar a nenhuma solução.

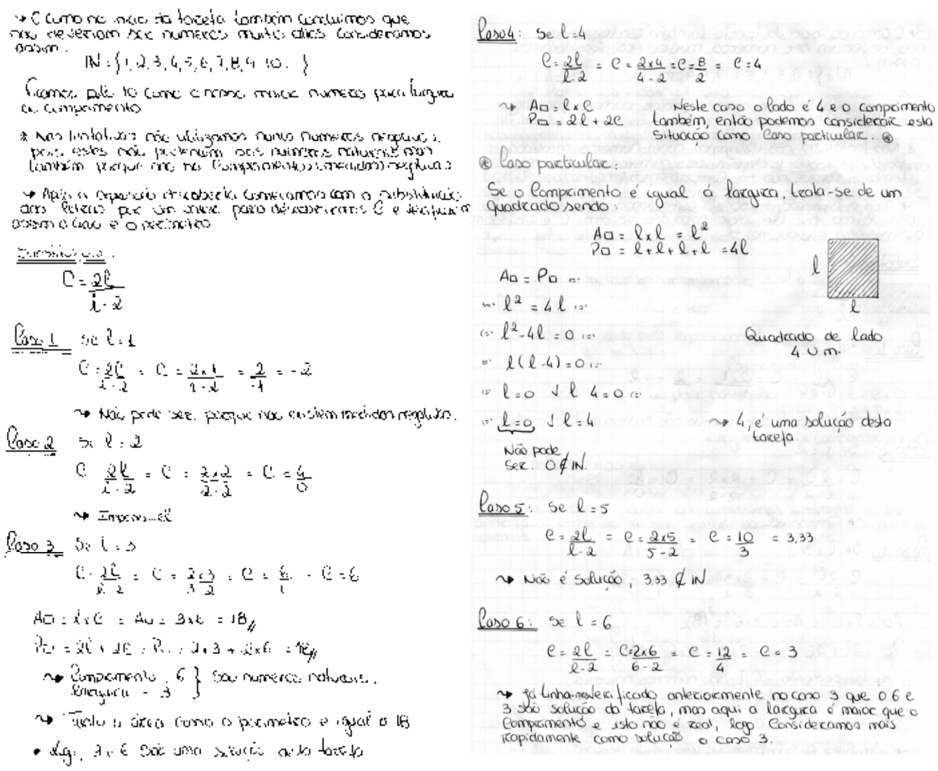
A nossa última tentativa falhada foi dividir o rectângulo em dois quadrados e atribuir aos lados do quadrado o mesmo valor, por exemplo 4, e calcular o perímetro e a área dos mesmos. Mas vimos que o resultado não estava correcto porque a largura seria 4, o comprimento 8, e, por isso, a área e o perímetro não seriam numericamente iguais.

Figura 66. Excerto B do relatório da tarefa 3 de Rafaela

Posteriormente, à fase inicial de exploração desta tarefa, os alunos começaram a sentir a necessidade de provar a conjectura formulada, que evidenciava estar correcta.

Da conjectura à prova

A determinado momento dos relatórios individuais desenvolvidos em grupo, os alunos tentaram mostrar como é que passaram da conjectura formulada à respectiva prova ou à tentativa de prova. Aurora, do *grupo 5*, referiu que o processo de raciocínio efectuado depois de terem determinado a expressão analítica, foi o de confirmar, pelo método de tentativa erro, quais eram os valores possíveis para o comprimento e para a largura, de forma a serem sempre números naturais (fig. 67).



$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \ldots\}$

$C = \frac{2l}{l-2}$

Caso 1 Se $l = 1$

$C = \frac{2l}{l-2} \Leftrightarrow C = \frac{2\times1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$

Caso 2 Se $l = 2$

$C = \frac{2l}{l-2} \Leftrightarrow C = \frac{2\times2}{2-2} \Leftrightarrow C = \frac{4}{0}$

Caso 3 Se $l = 3$

$C = \frac{2l}{l-2} \Leftrightarrow C = \frac{2\times3}{3-2} \Leftrightarrow C = \frac{6}{1} \Leftrightarrow C = 6$

Comprimento - 6, Largura - 3 } São números naturais.

Caso 4: Se $l = 4$

$C = \frac{2l}{l-2} \Leftrightarrow C = \frac{2\times4}{4-2} \Leftrightarrow C = \frac{8}{2} \Leftrightarrow C = 4$

$A_\square = l \times C$
$P_\square = 2l + 2C$

Neste caso o lado é 4 e o comprimento também, então podemos considerar esta situação como caso particular. ⊛

⊛ Caso particular:

Se o comprimento é igual à largura, trata-se de um quadrado sendo:

$A_\square = l \times l = l^2$
$P_\square = l + l + l + l = 4l$

$A_\square = P_\square \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow l^2 = 4l \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow l^2 - 4l = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow l(l-4) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow l = 0 \vee l - 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \underbrace{l = 0}_{\text{Não pode ser. } 0 \notin \mathbb{N}} \vee l = 4$

4, é uma solução desta tarefa.

Quadrado de lado 4 u.m.

Caso 5: Se $l = 5$

$C = \frac{2l}{l-2} \Leftrightarrow C = \frac{2\times5}{5-2} \Leftrightarrow C = \frac{10}{3} = 3{,}33$

Não é solução, $3{,}33 \notin \mathbb{N}$

Caso 6: Se $l = 6$

$C = \frac{2l}{l-2} \Leftrightarrow C = \frac{2\times6}{6-2} \Leftrightarrow C = \frac{12}{4} \Leftrightarrow C = 3$

Já tinha verificado anteriormente no caso 3 que o 6 e 3 são solução da tarefa, mas aqui a largura é maior que o comprimento e isto não é real, logo consideramos mais rapidamente como solução o caso 3.

Figura 67. Excerto B do relatório da tarefa 3 de Aurora

Aurora, considerou dez valores possíveis para largura e calculou os respectivos comprimentos, provando assim, de uma forma rudimentar que só existiam três soluções possíveis para esta tarefa. No entanto, após a utilização deste método de tentativa erro, a maioria dos alunos sentiu necessidade de verificar se existiam mais valores naturais que fossem possíveis respostas à tarefa formulada pela professora.

Outros alunos, não efectuaram o mesmo raciocínio de Rafaela, passando automaticamente, para a utilização da calculadora gráfica para confirmar qual era a representação gráfica da função que tinham obtido anteriormente, $f(x)=2+4/(x-2)$. Chegaram à conclusão que a função obtida tinha como representação gráfica uma hipérbole e que pertencia à família de funções anteriormente estudadas na tarefa 2.

Por exemplo, Raul referiu no seu relatório que o seu grupo após ter determinado analiticamente, as equações das assimptotas vertical e horizontal, passaram à utilização da calculadora gráfica para poder visualizar o gráfico da função considerada (fig. 68).

Obtemos assim uma expressão capaz de representar uma função racional, pelo que podemos descobrir através do seu estudo a ou as respostas para o nosso problema. Em primeiro lugar se procedermos à sua simplificação através da divisão de polinómios temos que:

- $y = \frac{-2x}{-x+2} \Leftrightarrow y = 2 - \frac{4}{-x+2}$

Dessa forma conseguimos analiticamente determinar as assimptotas, quer horizontal, quer vertical, que sendo assim são:

- A.V. -> x=2
- A.H.-> y=2

Estas assimptotas podem ser descobertas através da utilização da calculadora gráfica, o que revela a sua grande importância para a nossa investigação com recurso a essa tão fulcral ferramenta. Se passarmos à representação de ambos os gráficos temos:

- Gráfico A - $y = \frac{-2x}{-x+2}$
- Gráfico B - $y = 2 - \frac{4}{x+2}$

Gráfico A

Gráfico B

Figura 68. Excerto B do relatório da tarefa 3 de Raul

Posteriormente, os alunos efectuaram a prova das possíveis soluções à tarefa com recurso à calculadora gráfica, na qual verificaram que eram apenas três (3,6), (6,3) e (4,4). Este processo de prova como foi realizado com a calculadora gráfica vai ser descrito na próxima categoria de análise, considerada neste estudo.

Entretanto, alguns alunos testaram analiticamente a soluções encontradas por tentativa erro e através da utilização da calculadora gráfica. Este é, por exemplo o caso, de Dora pertencente ao *grupo 7*, que verificou se as soluções encontradas eram válidas, como resposta à tarefa (fig. 69).

Se $c = 3$

$l = \frac{2c}{c-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow l = \frac{2\times 3}{3-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow l = 6$

$P = 3+3+6+6$

$= 18$

$A = c \times l$

$= 6 \times 3$

$= 18$

Se $c = 4$

$l = \frac{2c}{c-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow l = \frac{2\times 4}{4-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow l = 4$

$P = 4+4+4+4$

$= 16$

$A = c \times l$

$= 4 \times 4$

$= 16$

Se $c = 6$

$l = \frac{2c}{c-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow l = \frac{2\times 6}{6-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow l = 3$

$P = 3+3+6+6$

$= 18$

$A = c \times l$

$= 6 \times 3$

$= 18$

No entanto decidimos dar valores maiores, para de facto termos a certeza de que não existiam mais pares ordenados.

Se $c = 30$ $l = \frac{2c}{c-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = \frac{2\times 30}{30-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = 2.14$	Se $c = 300$ $l = \frac{2c}{c-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = \frac{2\times 300}{300-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = 2.013$	Se $c = 3000$ $l = \frac{2c}{c-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = \frac{2\times 3000}{3000-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = 2.0013$
Se $c = 40$ $l = \frac{2c}{c-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = \frac{2\times 40}{40-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = 2.105$	Se $c = 400$ $l = \frac{2c}{c-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = \frac{2\times 400}{400-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = 2.01$	Se $c = 4000$ $l = \frac{2c}{c-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = \frac{2\times 4000}{4000-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = 2.001$

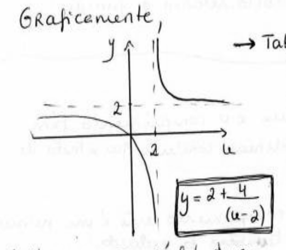
Se $c = 60$ $l = \frac{2c}{c-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = \frac{2\times 60}{60-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = 2.069$	Se $c = 600$ $l = \frac{2c}{c-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = \frac{2\times 600}{600-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = 2.007$	Se $c = 6000$ $l = \frac{2c}{c-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = \frac{2\times 6000}{6000-2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = 2.0007$

Concluímos então que mais nenhum par ordenado, era solução.

Figura 69. Excerto do relatório da tarefa 3 de Dora

Julieta, no seu relatório referiu também qual foi o processo de tentativa de prova efectuado, pelo seu *grupo 2*, com a utilização da calculadora gráfica (fig. 70).

Graficamente,



$\boxed{y = 2 + \frac{4}{(u-2)}}$

→ Tabela correspondente

u (largura)	y (comprimento)
...	...
(1) 0	0
(2) 1	-2
(3) 2	ERROR
3	6
(4) 4	4
(5) 5	3,333(3)
6	3
...	...

Verificamos que só há duas soluções que verificam as condições impostas:
- Rectângulo com 3 unidades de largura e 6 de comprimento
- Rectângulo com 6 unidades de largura e 6 de comprimento

Excluímos as seguintes hipóteses:
- (1) não há valores nulos de largura e comprimento.
- (2) não há comprimentos com valores negativos
- (3) "ERROR" representa que não há valores pois é uma assimptota vertical u=2
- (4) Como a largura e o comprimento têm medidas iguais, podemos concluir que se trata de um quadrado;
- (5) A medida do comprimento não é um número natural, pelo que também foi excluído.

Para confirmar a solução:

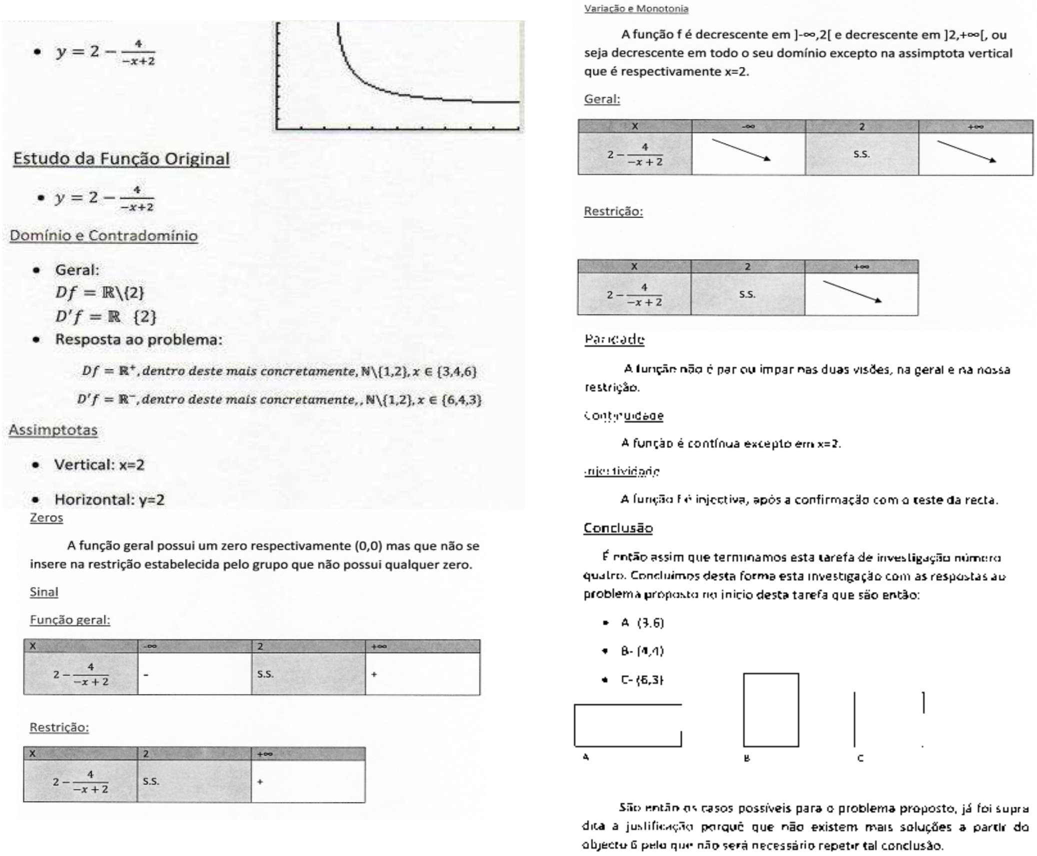
3(l), 6(c): $c = 2 + \frac{4}{(l-2)} \Leftrightarrow 6 = 2 + \frac{4}{(3-2)} \Leftrightarrow \boxed{6 = 6}$

6(l), 3(c): $c = 2 + \frac{4}{(l-2)} \Leftrightarrow 3 = 2 + \frac{4}{(6-2)} \Leftrightarrow \boxed{3 = 3}$

como queríamos mostrar.

Figura 70. Excerto C do relatório da tarefa 3 de Julieta

Raul, depois de ter efectuado a prova das possíveis soluções para a tarefa, passou ao estudo da função obtida quanto ao domínio, contradomínio, assimptotas, monotonia, paridade e sinal. Finalmente, concluiu o seu relatório com a resposta final à investigação proposta pela professora investigadora indicando que eram apenas três, as soluções possíveis à tarefa proposta (fig. 71).



- $y = 2 - \frac{4}{-x+2}$

Estudo da Função Original

- $y = 2 - \frac{4}{-x+2}$

Domínio e Contradomínio

- Geral:
  $Df = \mathbb{R}\backslash\{2\}$
  $D'f = \mathbb{R}\ \{2\}$
- Resposta ao problema:
  $Df = \mathbb{R}^{+}$, *dentro deste mais concretamente*, $\mathbb{N}\backslash\{1,2\}, x \in \{3,4,6\}$
  $D'f = \mathbb{R}^{-}$, *dentro deste mais concretamente,*, $\mathbb{N}\backslash\{1,2\}, x \in \{6,4,3\}$

Assimptotas

- Vertical: x=2
- Horizontal: y=2

Zeros

A função geral possui um zero respectivamente (0,0) mas que não se insere na restrição estabelecida pelo grupo que não possui qualquer zero.

Sinal

Função geral:

X	-∞	2	+∞
$2-\frac{4}{-x+2}$	-	S.S.	+

Restrição:

X	2	+∞
$2-\frac{4}{-x+2}$	S.S.	+

Variação e Monotonia

A função f é decrescente em]-∞,2[e decrescente em]2,+∞[, ou seja decrescente em todo o seu domínio excepto na assimptota vertical que é respectivamente x=2.

Geral:

X	-∞	2	+∞
$2-\frac{4}{-x+2}$	↘	S.S.	↘

Restrição:

X	2	+∞
$2-\frac{4}{-x+2}$	S.S.	↘

Paridade

A função não é par ou impar nas duas visões, na geral e na nossa restrição.

Continuidade

A função é contínua excepto em x=2.

Injectividade

A função f é injectiva, após a confirmação com o teste da recta.

Conclusão

É então assim que terminamos esta tarefa de investigação número quatro. Concluimos desta forma esta investigação com as respostas ao problema proposto no inicio desta tarefa que são então:

- A (3,6)
- B- (4,4)
- C- (6,3)

A B C

São então os casos possíveis para o problema proposto, já foi supra dita a justificação porquê que não existem mais soluções a partir do objecto 6 pelo que não será necessário repetir tal conclusão.

Figura 71. Excerto C do relatório da tarefa 3 de Raul

No final do relatório era pedido aos alunos que fizessem uma reflexão crítica e autocrítica relativamente ao trabalho de investigação desenvolvido, em grupo. Uma aluna, Amélia do *grupo 4*, na sua reflexão salientou que "foram várias as conjecturas abandonadas, umas por erro de raciocínio e outras mesmo por erro analítico" (reflexão de Amélia), manifestando algumas dificuldades iniciais na interpretação da tarefa, que foram ultrapassadas com o desenvolvimento da investigação. Apesar das dificuldades iniciais, na fase de apropriação da tarefa, com a formulação de conjecturas que tiveram que ser abandonadas devido à não validade das mesmas, o seu grupo conseguiu formular uma conjectura válida e desenvolveu argumentos de modo a provar a sua veracidade. Salientou, também a importância da "inter-ajuda" e da "colaboração entre todos os elementos do grupo", para o bom desenvolvimento do trabalho de grupo. Relativamente à importância da inter-ajuda e da colaboração no trabalho de grupo, uma outra aluna, Júlia do *grupo 1*, salientou que este teve reflexo no desenvolvimento do raciocínio e da aprendizagem. Júlia referiu também que "a realização destas tarefas é muito importante pois contribui para a auto-aprendizagem de cada um" (reflexão de Júlia). É, assim, possível depreender pela reflexão de Júlia que houve uma aprendizagem significativa, em consequência da dinâmica criada em torno da argumentação matemática.

A grande maioria dos alunos gostou de realizar a tarefa de investigação em grupo. Manifestaram também vontade de em futuras aulas desenvolverem tarefas do mesmo tipo. Elisa que pertencia ao mesmo *grupo 1* de Júlia, salientou também a importância do bom ambiente e da troca de ideias durante o desenvolvimento do trabalho em grupo, diz mesmo que "no grupo, o ambiente é muito propício para realizar para realizar um bom trabalho uma vez que todos nos ouvimos e nos ajudamos" (reflexão de Elisa). Referiu ainda que, como esta tarefa era uma aplicação ao real, das duas anteriores, tornou-se mais interessante de investigar e que este método de ensino, em que os alunos são estimulados de uma forma autónoma a construírem os seus conhecimentos, tornou-se "uma maneira muito interessante de aprender".

Uma outra aluna, Vitória do *grupo 7*, foi ao encontro das reflexões referidas anteriormente, pois salientou a importância de "trabalhar em conjunto, raciocinar em conjunto e de chegar a soluções verdadeiras também em conjunto" (reflexão de Vitória). A aluna argumentou que esta tarefa foi muito educativa devido a desenvolver o raciocínio e a prática matemática. Verificou também que o método de tentativa erro poderia induzir os alunos na formulação de conjecturas erradas e que o método de prova mais indicado era o analítico.

Rafaela, que pertencia ao *grupo 5*, salientou também a importância da realização das tarefas de investigação salientando que "são dos melhores métodos de ensino, pois permitem-nos estabelecer relações entre diferentes conteúdos com o fim de chegar a uma solução" (reflexão de Rafaela). Tal como a aluna Amélia considerada anteriormente, a Rafaela também teve algumas dificuldades iniciais no momento de apropriação da tarefa que foram colmatadas com os argumentos e os contra-argumentos dos elementos do seu *grupo 5*. Esta aluna refere mesmo que "tentámos ser claros a explicar os nossos raciocínios de modo a que todos percebessem e pudessem contra-argumentar" (reflexão de Rafaela).

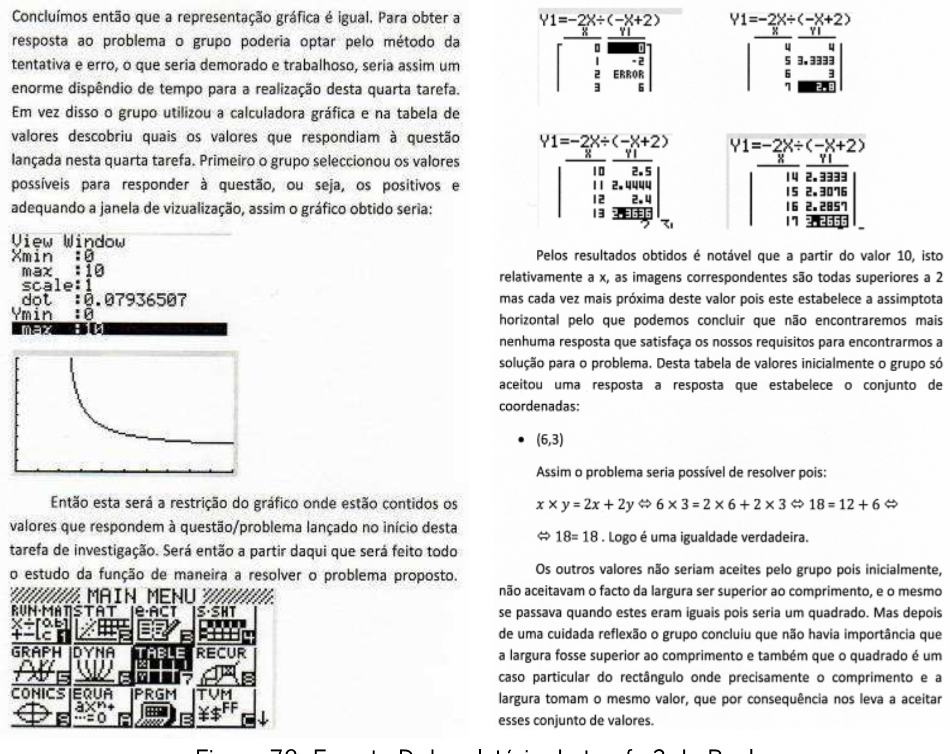
Foram, assim, várias as reflexões dos alunos que manifestaram o seu entusiasmo na participação nesta investigação e constataram que esta tarefa desenvolveu a capacidade de argumentar matematicamente.

A calculadora gráfica

Nesta tarefa, contrariamente ao verificado na investigação das anteriores, os alunos não utilizaram a calculadora gráfica na fase de apropriação da tarefa, pois começaram a desenvolver os seus raciocínios tentando encontrar as soluções para as dimensões do rectângulo pelo método de tentativa erro. Os alunos quando pretenderam provar que só existiam três soluções para a tarefa proposta, passaram a utilizar a calculadora gráfica de forma mais activa e crítica.

Contributos

Com o decorrer da investigação os alunos na sua maioria colocaram a função na calculadora gráfica e, posteriormente fizeram uma restrição ao domínio. No caso de Raul do *grupo 3*, após ter verificado com a utilização da calculadora gráfica que o gráfico da função era uma hipérbole que pertencia à família de funções estudadas na tarefa 2, considerou para o efeito uma janela de visualização *Standard*. Entretanto, efectuou uma restrição ao domínio da função considerada, alterando para tal a janela de visualização para valores de x compreendidos entra 0 e 10. Na tentativa de encontrar as possíveis soluções, e de forma a provar que eram apenas três (3,6), (6,3) e (4,4), Raul utilizou o *menu table* da sua calculadora gráfica e considerou diferentes valores para x (fig. 72).



Concluímos então que a representação gráfica é igual. Para obter a resposta ao problema o grupo poderia optar pelo método da tentativa e erro, o que seria demorado e trabalhoso, seria assim um enorme dispêndio de tempo para a realização desta quarta tarefa. Em vez disso o grupo utilizou a calculadora gráfica e na tabela de valores descobriu quais os valores que respondiam à questão lançada nesta quarta tarefa. Primeiro o grupo seleccionou os valores possíveis para responder à questão, ou seja, os positivos e adequando a janela de vizualização, assim o gráfico obtido seria:

View Window
Xmin :0
max :10
scale:1
dot :0.07936507
Ymin :0
max :10

Então esta será a restrição do gráfico onde estão contidos os valores que respondem à questão/problema lançado no início desta tarefa de investigação. Será então a partir daqui que será feito todo o estudo da função de maneira a resolver o problema proposto.

MAIN MENU
RUN·MAT STAT e·ACT S·SHT
GRAPH DYNA TABLE RECUR
CONICS EQUA PRGM TVM

Y1=−2X÷(−X+2)

X	Y1
0	0
1	-2
2	ERROR
3	6

Y1=−2X÷(−X+2)

X	Y1
4	4
5	3.3333
6	3
7	2.8

Y1=−2X÷(−X+2)

X	Y1
10	2.5
11	2.4444
12	2.4
13	2.3636

Y1=−2X÷(−X+2)

X	Y1
14	2.3333
15	2.3076
16	2.2857
17	2.2666

Pelos resultados obtidos é notável que a partir do valor 10, isto relativamente a x, as imagens correspondentes são todas superiores a 2 mas cada vez mais próxima deste valor pois este estabelece a assimptota horizontal pelo que podemos concluir que não encontraremos mais nenhuma resposta que satisfaça os nossos requisitos para encontrarmos a solução para o problema. Desta tabela de valores inicialmente o grupo só aceitou uma resposta a resposta que estabelece o conjunto de coordenadas:

- (6,3)

Assim o problema seria possível de resolver pois:

$x \times y = 2x + 2y \Leftrightarrow 6 \times 3 = 2 \times 6 + 2 \times 3 \Leftrightarrow 18 = 12 + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18 = 18$. Logo é uma igualdade verdadeira.

Os outros valores não seriam aceites pelo grupo pois inicialmente, não aceitavam o facto da largura ser superior ao comprimento, e o mesmo se passava quando estes eram iguais pois seria um quadrado. Mas depois de uma cuidada reflexão o grupo concluiu que não havia importância que a largura fosse superior ao comprimento e também que o quadrado é um caso particular do rectângulo onde precisamente o comprimento e a largura tomam o mesmo valor, que por consequência nos leva a aceitar esses conjunto de valores.

Figura 72. Excerto D do relatório da tarefa 3 de Raul

Posteriormente, Raul verificou que os três valores encontrados eram as únicas soluções para a tarefa (fig. 73), argumentado que pelo facto do gráfico da função considerada ter uma assimptota horizontal de equação $y = 2$ então para valores de $x > 6$ pertencentes a IN a imagem correspondente é sempre um valor próximo de zero, mas não inteiro positivo.

Assim temos como soluções os seguintes conjuntos de valores:

- (3,6)
- (4,4)
- (6,3)

É de salientar que não é possível achar outro valor que se integre nas nossas restrições pois como a imagem do objecto 6 é 3 o próximo valor de y que pode tomar, que satisfaça as condições para estabelecer a resposta ao problema, será o 2 o que nos leva a ter a certeza que não existem mais valores pois esta imagem é precisamente a assimptota horizontal. Embora todos os valores tendam para este, não é possível

Figura 73. Excerto E do relatório da tarefa 3 de Raul

Esta prova efectuada por Raul e pelos restantes elementos da turma só foi possível devido à confirmação dos resultados, no visor da calculadora gráfica. Acerca deste aspecto, Raul afirmou no seu relatório que:

> a máquina calculadora gráfica representou um papel fundamental na realização desta tarefa pois sem esta não seria possível uma tão exacta resolução do problema bem como a rápida e mais fácil resolução dos cálculos intermédios para o estudo pormenorizado da função. Sem dúvida que estabelece um ponto fulcral e pertinente mas também concluímos desta tarefa que a calculadora deve ser manuseada e utilizada com cuidado e exactidão para não sermos induzidos em erro, como seríamos nesta tarefa se não tivéssemos conferido os resultados.

A utilização da calculadora gráfica tornou-se, para os alunos, um instrumento imprescindível para a investigação e referiram que sem este artefacto, a actividade não poderia ter sido tão bem explorada.

Nos relatórios desenvolvidos individualmente os alunos efectuaram também uma reflexão sobre a utilização da calculadora gráfica durante a investigação da presente tarefa. Uma das alunas, Júlia do *grupo 1,* refere que é importante a utilização da calculadora gráfica na medida em "com a utilização frequente da mesma aprendemos a utilizá-la melhor, dominando-a melhor" (reflexão de Júlia).

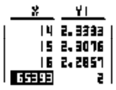
Uma outra aluna, Rafaela referiu, na sua reflexão, que a calculadora gráfica foi um importante instrumento na investigação desenvolvida pelo seu *grupo 4*, pois permitiu-lhes "visualizar graficamente a função" e através do *menu table* conseguiram determinar os valores possíveis para as dimensões do rectângulo pretendido. Aurora, salientou também no seu relatório que, a possibilidade de visualizar o gráfico e a respectiva tabela de uma função na calculadora gráfica permitiu aos alunos desenvolverem de forma mais coerente os seus raciocínios. Esta aluna, refere mesmo que "a calculadora gráfica facilita-nos na resolução da tarefa porque nos facilita o raciocínio" (reflexão de Aurora).

Os restantes alunos da turma manifestaram opiniões análogas no que concerne às vantagens na utilização da calculadora gráfica. Como se constatou nas tarefas anteriores, a calculadora gráfica contribuiu para que os alunos desenvolvessem argumentos de modo que fossem aceites como válidos, para todos os colegas da turma.

Dificuldades

Tal como já se tinha verificado durante a discussão na turma, a única dificuldade diagnosticada na utilização da calculadora gráfica prendeu-se com o caso revelado por Raul que referiu, a determinado momento no seu relatório que, se $x = 269854$ então $y = 2$ (fig. 74).

nunca tomar esse valor. Embora existe um caso particular que passo a citar: "ao utilizarmos a tabela de valores da máquina calculadora verificamos que a imagem do objecto 65393 é 2", comprovado por:



65393

Isto é então uma contradição para as suposições e justificações anteriormente citadas, mas este caso deve ser analisado e depois de feita essa análise vemos então que este caso demonstra que como enorme é a importância desta ferramenta didática que é a calculadora gráfica, enorme deve ser o cuidado com que esta deve ser manuseada para não cairmos em erro pois se verificarmos cuidadosamente a calculadora tem tendência a arredondar os valores o que causa a indução em erro. Se verificarmos temos que:

É então visto que é necessário muito cuidado ao lidar com esta ferramenta que é a calculadora gráfica pois também comete erros ou arredondamentos que têm que ser investigados e verificados constantemente para não sermos induzidos em erro. Depois de

Figura 74. Excerto F do relatório da tarefa 3 de Raul

Raul salientou que pelo facto da calculadora gráfica ter tendência para arredondar os valores, pode induzir os alunos a formular conjecturas não válidas. Assim, os valores devem ser cuidadosamente investigados e verificados pelos alunos de forma a não serem induzidos em erro. Os alunos devem assim desenvolver uma atitude activa e crítica quando utilizam a calculadora gráfica.

Síntese

Após as investigações anteriores os alunos foram confrontados com uma tarefa de cariz mais prático em que estes eram desafiados em encontrarem todos os rectângulos cujas medidas dos comprimentos dos lados fossem números naturais e a área numericamente igual ao perímetro. Esta tarefa foi muito rica que as anteriores, quer na formulação e teste de conjecturas, quer na tentativa de efectuar a prova. Apesar de inicialmente nos grupos, os alunos tentarem encontrar as soluções à tarefa pelo método de tentativa erro, aperceberam-se que desta forma nunca teriam a certeza relativamente ao total de soluções possíveis. Na discussão na turma, os alunos revelaram que após as suas dificuldades iniciais conseguiram modelar uma função, que lhes permitiu determinar todas as possíveis soluções à tarefa. Posteriormente, os alunos observaram que a função encontrada tinha duas assimptotas e argumentaram que atendendo ao facto da equação da assimptota vertical ser $x = 2$ e a da horizontal ser $y = 2$ então as soluções à tarefa eram apenas três. Os relatórios revelaram uma grande evolução na sua execução relativamente ao que se tinha observado nas anteriores tarefas. Os alunos nos seus relatórios efectuaram uma explicação pormenorizada de todo o processo de investigação, desencadeado por cada um dos grupos, revelando muito cuidado na argumentação matemática explicando quais foram as conjecturas rejeitadas e o porquê de as rejeitarem, a conjectura seguida, o seu teste e respectiva prova, para a qual sentiram a necessidade em utilizar a calculadora gráfica.

Relativamente à utilização da calculadora na exploração desta tarefa, verificou-se que os alunos só recorreram a este artefacto quando sentiram a necessidade de verificar a validade das suas conjecturas. Quando os alunos encontraram a expressão analítica da função racional que modelava a tarefa dada, passaram a utilizar a calculadora gráfica para efectuarem o estudo do gráfico da função. Nesta fase da investigação a calculadora revelou ser um importante instrumento de apoio, para que os alunos pudessem a partir da análise do gráfico da função e da respectiva tabela chegar à conclusão da tarefa proposta. Assim, constatou-se que a utilização da calculadora gráfica possibilitou e incentivou os alunos a argumentarem de forma crítica relativamente às possíveis soluções à tarefa.

5.4. Tarefa 4

A tarefa 4, tal com as duas primeiras tarefas, tinha como objectivo que os alunos atribuíssem diferentes valores aos parâmetros da família de funções $f(x) = k / ax^2$, em que a e k pertenciam a IR, de forma a estudar o seu comportamento gráfico. Esta família era importante ser estudada pois os gráficos obtidos eram distintos dos referentes às tarefas 1 e 2, no que diz respeito nomeadamente à paridade. Pretendia-se também que os alunos estudassem a transformação gráfica $g(x) = f(x - h)$, com $h \in IR$ e explorassem o seu comportamento gráfico da função g em comparação com o da função f tentando, assim, explicar e entender o efeito da alteração de cada um dos parâmetros no comportamento gráfico de cada uma das funções.

5.4.1. O trabalho de grupo

A investigação que os alunos desenvolveram sobre a tarefa 4 ocupou menos aulas do que as tarefas anteriores. Os grupos tiveram apenas algumas dificuldades na fase de apropriação da tarefa no que concerne à representação algébrica da função g. Na exploração desta tarefa não tiveram depois dificuldades, visto fazer parte de uma sequência em que todas as investigações propostas aos alunos se inter-relacionavam. As discussões desenvolvidas pelos grupos são curtas pois tiveram algumas dificuldades nas gravações das mesmas.

A argumentação matemática

A estrutura de raciocínio na exploração desta tarefa foi análoga a todos os grupos, pois como as duas primeiras tarefas tinham como objectivo o estudo do gráfico da função, a partir da alteração dos valores dos parâmetros, o mesmo se pretendia com a presente investigação. A diferença que existiu nesta tarefa em relação às anteriores foi o de pretender também que os alunos fizessem o estudo da transformação gráfica da função dada inicialmente, que correspondia à inversa de uma função quadrática.

Formulação e teste de conjecturas

Na fase inicial, de apropriação da tarefa, todos os grupos começaram por atribuir diferentes valores aos parâmetros, que nesta investigação eram apenas dois. Os grupos não mostraram dificuldades em iniciar esta tarefa, visto já terem trabalhado com duas investigações anteriores em que o objectivo era semelhante.

O grupo 1, que nas anteriores investigações não teve qualquer dificuldade em as desenvolver, o mesmo se verificou com a tarefa 4. Este grupo iniciou a investigação atribuindo diferentes valores aos parâmetros para poderem chegar a algumas conclusões à tarefa.

Alexandra: Vamos começar por dar valores aos parâmetros da função g.
Fausto: Acho melhor começar pela função f.
Elisa: E que valores atribuímos?
Júlia: Tudo um para ser mais fácil.
Elisa: O gráfico dá-nos uma assimptota vertical.
Alexandra: Que neste caso é igual a zero.

Outros grupos, nomeadamente, o *grupo 4*, teve algumas dificuldades iniciais em escrever a expressão analítica da função g, a partir da função f. Estas alunas formularam as suas conjecturas iniciais e tentaram validá-las, mas como após várias tentativas não conseguiram entender como determinar a expressão analítica da função g a partir da função f, pediram a ajuda da professora.

Flora: Aqui devemos ter que estudar a $g(x)$ em função da $f(x)$.
Rafaela: Temos que dar valores a x e a h.
Flora: Mas tem $f(x-h)$.
Rafaela: Estão a perceber? O problema é a substituição. Fica $g(x)=k/ax^2-h$?
Flora: Nós temos de substituir uma pela outra, mas não sabemos como.
Rafaela: Mas vamos fazer primeiro a função $f(x)$. Vamos começar com valores baixos.
Flora: Com todos os parâmetros iguais a 1.
Rafaela: De modo a ficar $1/x^2$.
Conceição: $f(x)=1/x^2$.

Este grupo, após ter considerado iniciar a sua investigação a partir da função f com $k=1$ e $a=1$, fizeram o seu estudo com o auxílio da calculadora gráfica.

Conceição: A função vai-se aproximando do eixo dos xx.
Flora: Deixa ver se tem máximo ... não tem.
Conceição: Agora fazemos o estudo.
Flora: Não há máximos nem mínimos.
Rafaela: O contradomínio é IR^+. O que é que é excepto a assimptota?
Flora: O domínio.
Conceição: O contradomínio também se houver assimptota horizontal.
Flora: Não há zeros pois não?
Conceição: Não.

Pela análise desta discussão desenvolvida em grupo, constatou-se que apesar da elaboração das suas conjecturas, as alunas tiveram algumas dificuldades em fazer a conexão com os conceitos matemáticos fundamentais.

Da conjectura à prova

Os alunos na tentativa de testarem as suas conjecturas, elaboraram argumentos para encontrar uma prova matemática, neste caso generalização, para todas as funções da mesma família proposta na tarefa. Uma das dificuldades que a professora investigadora registou, foi a de os alunos, a partir do conceito de assimptota definido na tarefa 1 e 2, não conseguirem concluir que a família de funções da presente tarefa tinha uma assimptota horizontal. Os alunos, nomeadamente, do *grupo 1* e o *grupo 7*, consideraram que a partir do facto de o contradomínio da função ser o intervalo $]0,+\infty[$, a função não tinha assimptotas horizontais pois o gráfico da função não tinha *falhas*. Por exemplo, no caso do *grupo 1,* os alunos afirmaram que o gráfico da função f , com $k=1$ e $a=1$, não tinha assimptotas horizontais.

Júlia: Este gráfico não tem assimptotas horizontais pois não?
Fausto: Não.

Esta dificuldade de não entenderem que a função tinha uma assimptota horizontal, constatou-se também nas discussões desenvolvidas pelo *grupo 4*.

Rafaela: A assimptota vertical é $x=0$. Não há assimptota horizontal, pois não?
Conceição: Há!
Flora: Não há nada.

O facto de, os alunos manifestarem algumas dificuldades relativamente à existência de assimptota horizontal, pode ter resultado do tema das funções racionais ter sido dado através da exploração de tarefas de investigação e de os alunos terem sido estimulados a construírem os novos conceitos à medida que a experiência ia decorrendo. Assim, o conceito de assimptota só ficou completo com esta investigação, quando os alunos se aperceberam que, uma assimptota para além de ser um "buraco" no gráfico de uma função, era também um valor para o qual a função "tende mas não toca".

Com o decorrer da investigação, todos os grupos elaboraram novas conjecturas e tentaram testá-las e justificá-las a partir da apresentação de diferentes argumentos. O *grupo 1* elaborou várias conjecturas e conseguiu com o auxílio da calculadora gráfica testar e verificar a validade das mesmas.

Elisa: Agora já podemos atribuir valores aos parâmetros da função g , podem ser também com o número 1.
Alexandra: Neste gráfico a assimptota vertical é $x=1$.
Fausto: E se alterarmos o parâmetro k ?
Júlia: Eu acho que à medida que aumentámos o k , as parábolas da função se afastam, mas confirma Alexandra.
Alexandra: Sim é o que acontece se o valor de k for aumentado, mas se o diminuirmos as parábolas vão-se aproximar.
Fausto: Agora podemos ver o que varia o parâmetro a .
Elisa: É o contrário do k , se aumentarmos o valor de a a função aproxima-se, se diminuirmos afasta-se.
Júlia: E o h ?
Alexandra: Eu considerei h igual a 6 e assimptota tomou o valor 6.
Fausto: Eu considerei 9 e a assimptota também deu nove.
Júlia: Eu 15 e assimptota deu igual.
Elisa: Então nesta família de funções a assimptota vertical é sempre a h .
Alexandra: Olha se k tomar valor negativo a única alteração na função é que sofre uma translação.
Elisa: Tens a certeza que é só o parâmetro h que influência a função?
Alexandra: Não sei.

Os alunos deste grupo, ao longo desta fase da investigação, foram atribuindo diferentes valores aos parâmetros h e k, como forma de formulação e posterior verificação das suas conjecturas. Os argumentos apresentados pelos alunos durante este diálogo, evidenciam que o processo de investigação só foi possível de efectuar, num curto espaço de tempo, devido à possibilidade de poderem utilizar a calculadora gráfica, como instrumento de verificação. Denota-se também que os alunos, nos seus diálogos tentam provar a validade das suas conjecturas.

Elisa: Vamos verificar, mas mantemos o h igual a um.
Fausto: Eu considerei k igual a dois, a igual a três, os parâmetros têm o mesmo sinal e a função é positiva.
Júlia: Atribui os mesmos valores só modifiquei o sinal de a para negativo e a função altera-se para negativa.
Elisa: Já temos outra conclusão.
Alexandra: E temos outra, se h corresponde sempre á assimptota então o domínio da função é todos os números reais excepto h.
Fausto: Então o contradomínio varia em função de a e k com sinais iguais e de a e k com sinais diferentes.
Júlia: Assim como a monotonia.
Elisa: Sim porque os sinais de k e a mostra-nos quando a função é negativa e positiva e a partir disso vemos quando ela é crescente e decrescente.
Júlia: A função não é injectiva, nem par nem impar.
Alexandra: Mas podemos dizer que a função é simétrica em relação á assimptota vertical.
Fausto: E também não tem zeros.
Elisa: Olhem, se a igual a zero a função é impossível.
Alexandra: E se o k for igual a zero? A função f é igual a g que é igual a zero.
Elisa: E se h igual a zero temos a função f.
Júlia: Acho que já chegamos a todas as conclusões, não já?
Fausto: Já.
Elisa: Acabamos antes do tempo. Os primeiros!

Da análise desta discussão do grupo verificou-se também, um espírito de partilha, de cooperação e de inter-ajuda, o que fez com que o trabalho desenvolvido por estes alunos ser de uma grande riqueza argumentativa. A capacidade destes alunos, em trabalhar em grupo desencadeou que, nomeadamente na investigação desta tarefa, tivessem efectuado um bom trabalho e, de forma mais rápida e produtiva.

O *grupo 4*, após ter solicitado a ajuda da professora, para tentar entender como é que deveriam escrever a expressão analítica da função g, relativamente à translação da função f em relação ao eixo dos xx, conseguiram elaborar alguns argumentos, de modo a chegar a uma generalização para a translação da família de funções dada.

Rafaela: Se tivermos $f(x)=1/x^2$ vamos primeiro considerar $g(x)=1/(x-1)^2$.
Flora: A assimptota é $x=1$.

Rafaela: O domínio é $IR\setminus\{1\}$ e o contradomínio é $]0,+\infty[$. Zeros?
Flora: Não tem. Par ou ímpar?
Conceição: A função g é par em relação à assimptota.
Rafaela: Vamos agora escolher valores diferentes ... $k=-1$, $a=-1$ e $h=-1$.
Flora: Assim, se tivermos $f(x)=1/x^2$, vamos considerar $g(x)=-1/-1(x-1)^2$.
Rafaela: No caso anterior, a $g(x)$ andou um valor para a frente em relação à $f(x)$ porque foi o valor que demos a h. Agora andou para trás porque demos o valor -1 a h.
Conceição: São as translações.
Rafaela: Agora damos os valores $k=-2$, $a=2$ e $h=2$.
Flora: Assim, $f(x)=-2/2x^2$ e $g(x)=-2/2(x-2)^2$.
Rafaela: Volta a acontecer a translação.
Flora: Pois é. O domínio $IR\setminus\{2\}$.
Conceição: A assimptota é sempre o valor de h.

Neste excerto da discussão do *grupo 4*, constatam-se que apenas as aluna apenas consideraram alguns exemplos, na tentativa de encontrar uma conclusão para a presente tarefa. Este *grupo 4*, que no inicio da experiência a professora investigadora considerava que tinham muitas dificuldades, principalmente na tarefa 3, constatou-se que houve uma grande evolução na forma como construíram as suas conjecturas e as tentaram testar de forma a validá-las.

A calculadora gráfica

A calculadora gráfica, tal como em todas as tarefas anteriores demonstrou ser um instrumento imprescindível para o desenvolvimento desta tarefa. Mostrou também potenciar a capacidade dos alunos em argumentar matematicamente.

Contributos

Os contributos registados com o desenvolvimento e exploração desta tarefa foram iguais aos registados nas tarefas anteriores. Todos os grupos recorreram à calculadora gráfica para validar as suas conjecturas, em todos os momentos da presente investigação. Verificou-se também que, a calculadora gráfica contribuiu para que os alunos tivessem a possibilidade e a facilidade de poderem visualizar e estudar simultaneamente o gráfico da função f e o da função g, que resultava da translação da função f em relação ao eixo dos xx. Pela análise dos diálogos desenvolvidos em cada um dos grupos, sobre esta tarefa, verificou-se que a formulação e teste de conjecturas, assim, como as tentativas de prova evidenciadas, podem levar-nos a concluir que a calculadora gráfica contribuiu para o desenvolvimento da argumentação matemática, dos alunos desta turma.

Dificuldades

Nesta tarefa as dificuldades sentidas pelos alunos consistiram na interpretação do gráfico da função, que o visor da calculadora gráfica lhes mostrava. Estas dificuldades eram mais relacionadas com lacunas por parte dos alunos em alguns conceitos matemáticos, do que propriamente, com o manuseamento da calculadora gráfica. No entanto, apesar das dificuldades manifestadas por alguns alunos, elas também contribuíram para o desenvolvimento da discussão em cada um dos grupos, proporcionando desta forma a partilha de argumentos que justificassem a validação, ou não, das suas conjecturas.

5.4.2. Discussão na turma

A discussão na turma sobre a tarefa 3 decorreu na segunda parte de uma aula de noventa minutos. Apesar de esta tarefa ter um objectivo semelhante ao das anteriores foi, no entanto, com a presente discussão na turma que os alunos colmataram algumas dúvidas, relativas à definição de assimptota de uma função.

A argumentação matemática

Nesta investigação os alunos, como já estavam familiarizados, na tarefa 1 e 2, com o estudo da influência da alteração dos valores dos parâmetros nos gráficos de uma família de funções, tiveram mais facilidade em participar na discussão desenvolvida na turma. Os argumentos apresentados são mais coerentes e estão mais de acordo com as conjecturas formuladas e, os alunos demonstraram estar conscientes relativamente à necessidade da prova dos resultados obtidos, para todas as funções pertencentes à família em estudo.

Formulação e teste de conjecturas

Como nas tarefas anteriores, no inicio da discussão a professora escreveu no quadro interactivo a tarefa que foi proposta aos alunos investigarem. De seguida, referiu que uma das dificuldades que observou, aquando do desenvolvimento dos trabalhos de grupo, foi o não entendimento sobre o que é que se pretendia quando se pedia que investigassem como é que variava o gráfico da função $g(x)=f(x-h)$, em relação ao gráfico da função f, sendo $f(x)=k/ax^2$.

Professora: ...o vosso problema inicial era o que é que representava o ...
Raul: ... $g(x)$.
Professora: E então...
Elisa: Nós primeiro começamos pela função $g(x)=k/ax^2-h$ ...
Professora: Mas este erro inicial foi comum. Vocês fizeram $g(x)=k/ax^2-h$. Este foi o primeiro passo na investigação desta tarefa. E depois chegaram à conclusão que não, e...
Elisa: ...chegamos à função $g(x)=k/a(x-h)^2$.
Fausto: Depois chamamos a professora e ajudou-nos a descobriu que $g(x)=k/a(x-h)^2$...

Nesta fase da discussão na turma, constatou-se que a maioria dos alunos teve dificuldades em escrever a expressão analítica da função g e que pediram inicialmente a ajuda da professora, para conseguirem avançar na investigação desta tarefa 4.

Professora: Aqui só chegaram com uma ajudinha, jeitosa ... E então chegaram à conclusão que a função $g(x)=k/a(x-h)^2$. E esta é que era a função que nós queríamos investigar. E então, digam-me lá como é que continuaram o estudo?
Célia: Nós em primeiro lugar queríamos saber quais eram os parâmetros que podiam ser zero...
Raul: ... o que é que acontecia se um dos parâmetros fosse zero...
Luísa: Era impossível.
Raul: Não...
Professora: Será Raul?
Raul: Se a for igual a zero e k e h forem diferentes de zero...
Célia: Nós consideramos primeiro $a=0$ e k e h diferentes de zero...
Professora: Então o que é que acontecia?
Alguns alunos: É impossível.
Célia: Ficava $g(x)=$...
Raul: ...ficava igual a $k/0$ o que é impossível.
Professora: E se considerássemos $k=0$ e a e k diferentes de zero...
Luísa: Ficava uma recta $y=0$...
Professora: ...que coincidia com o eixo ...
Alguns alunos: ...com o eixo dos xx.
Professora: Sim, com o eixo dos xx. E depois...
Raul: ... $f(x)$ e $g(x)$ são iguais a zero.
Célia: E considerando $h=0$, $f(x)=g(x)$...
Fausto: ...que era igual a k/ax^2.

Neste excerto da discussão é evidente a formulação de três conjecturas, nomeadamente, se $a=0$ e k e h forem diferentes de zero então a função g é impossível, se $k=0$ e a e h forem diferentes de zero então a função g é dada $g(x)=0$ e representa uma recta que coincide com o eixo dos xx e se $h = 0$ então $f(x) = g(x) = k / ax^2$. É de realçar também, que estas duas conjecturas foram testadas e validadas aquando do desenvolvimento dos trabalhos de grupo e foram formuladas pela maioria dos alunos. A professora, novamente voltou a escrever no quadro interactivo os resultados obtidos neste início da discussão (fig. 75).

$f(x) = \frac{K}{ax^2}$ $\quad$ $g(x) = \frac{K}{a(x-h)^2}$

- Se $K=0$, $a, h \neq 0$ $\quad$ $f(x)=g(x)=0$
- Se $a=0$, $K, h \neq 0$, impossível
- $h=0$, $f(x) = g(x) = \frac{K}{ax^2}$

Figura 75. *Flipchart* A da tarefa 4 escrito pela professora

Seguidamente, a professora incentivou, novamente os alunos a indicarem quais foram as outras conjecturas formuladas ao longo da investigação.

Professora: E agora, mais?
Célia: Nós consideramos $k = 2$ e a e h iguais a 1.
Rafaela: E nós consideramos todos os parâmetros iguais a 1.

Nesta fase da discussão, os alunos limitaram-se a referir os valores que atribuíram aos parâmetros. No final da discussão, os alunos apenas referiram as conjecturas que formularam e para as quais testaram a sua veracidade, durante o desenvolvimento do trabalho de grupo.

Professora: Mais alguma conclusão a que chegaram?
Elisa: Na função original a assimptota horizontal é $y = 0$, assim como na função g.
Professora: Exactamente.
Alexandra: As funções f e g não são injectivas.
Professora: Exactamente estas funções têm essa particularidade. As funções não são injectivas. As funções são então, pares ou ímpares?
Alguns alunos: Pares.
Professora: Muito bem são funções pares.

Note-se que durante o desenvolvimento da discussão os alunos formularam e testaram outras conjecturas, no sentido de encontrarem argumentos suficientes para efectuarem uma prova para a família de funções em estudo e a respectiva translação.

Da conjectura à prova

Após as conjecturas iniciais, os alunos começaram a tentar provar os resultados obtidos para a família de funções f e respectiva translação g. Uma aluna, Elisa, começou por referir que se os valores das incógnitas k e a fossem iguais a 1 e, fizéssemos variar os valores da incógnita h então a equação da assimptota vertical era $x = h$.

Elisa: Nós mantivemos os valores de k e de a da função $f(x)$ e verificamos depois de atribuirmos diferentes valores a h que h era a assimptota vertical.
Raul: Exacto.
Professora: E verificaram que h era a assimptota vertical.

Na tentativa de encontrar uma prova para a conjectura formulada por Elisa, a professora acedeu à calculadora gráfica instalada no quadro interactivo, para em conjunto com todos os elementos da turma, investigar a sua veracidade. Posteriormente, a mesma aluna referiu que também verificou que a função g tinha sempre uma assimptota horizontal de equação $y=0$. No entanto, alguns alunos da turma tentaram refutar a conjectura formulada por Elisa, pois pensaram que como o contradomínio era $\left]0,+\infty\right[$ então a função era toda positiva. A acrescentar a estas suposições dos alunos, nas tarefas anteriores tinha-se definido assimptota como um "buraco" na função e que neste caso não podia existir assimptota horizontal pois não havia nenhuma "falha" na função, relativamente ao seu contradomínio. O que se verificou é que, os alunos nem sequer repararam que como o intervalo do contradomínio era aberto então a função não estava definida para $y=0$.

Aurora: Nós também verificamos que a assimptota horizontal era $y=0$.
Célia: Mas as funções não têm assimptota horizontal...
Fausto: Não tem assimptota horizontal pois a função não continua em baixo...
Professora: Atenção, tem assimptota horizontal em que caso?
Alguns alunos: Em todos.
Fausto: Em nenhum.
Professora: Então nunca há assimptota horizontal?
Célia: Há professora.
Raul: Há!
Professora: Ora reparem...

Como forma dos alunos entenderem a conjectura que tinha sido formulada por alguns colegas, a professora, como em situações anteriores, recorreu à calculadora gráfica para que fossem possível a todos visualizar, ao mesmo tempo, o gráfico da função e, assim, participar na discussão apresentando os seus argumentos contra ou a favor.

Fausto: Tem assimptota vertical mas não tem assimptota horizontal.
Professora: Atenção! Estou a perguntar-vos se a função tem ou não assimptota horizontal? Vamos então arranjar em conjunto uma função e colocar na calculadora...
Fausto: Vamos considerar na função f todos os parâmetros iguais 1...
Professora: Então, a função não tem assimptota horizontal?
Aurora: Tem $y=0$.
Professora: Então a equação da assimptota horizontal vai ser sempre $y=0$.
Fausto: Mas -1 e o -2, não fazem parte da função!

Elisa: Mas professora, só há assimptotas quando existe uma "falha" na função, não é?
Professora: Se repararem no gráfico da função, quando $x \rightarrow +\infty$, isto é, quando x aumenta a função tende a aproximar-se do eixo dos xx não tocando, tendendo assim para zero.
Elisa: Sim...
Alexandra: Ah...
Professora: Temos também que a função quando $x \rightarrow -\infty$, isto é, quando x toma valores cada vez mais pequenos o gráfico da função também tende para zero sem nunca tomar esse valor. Notoriamente a função vai ter uma assimptota horizontal de equação $y = 0$.
Fausto: Oh professora, mas a função para -1 e para -2 já não vai ter nada!
Professora: Vamos lá ver outra vez o porquê da vossa dúvida. Vamos agora recorrer à tabela da função...
Alexandra: Mas professora uma assimptota é uma interrupção da função...
Fausto: ...logo a função não tem "falhas" e assim não tem assimptota horizontal.
Professora: Reparem na tabela... Eu ainda não me tinha apercebido que ainda alguns de vocês não tinham compreendido correctamente a noção de assimptota...

Os alunos Fausto, Alexandra e Elisa, que tinham a particularidade de pertencerem todos ao *grupo 1*, continuavam a não entender, o porquê da função f ter assimptota horizontal, apesar de todos os argumentos apresentados pela professora, no sentido de encontrar uma nova definição de assimptota em conjunto com a turma que não fosse apenas a de "falha" ou de "buraco" na função.

No sentido dos argumentos apresentados irem de encontro a uma tentativa de os fazer entender que a definição de assimptota tinha de ser alterada, a professora recorreu à calculadora gráfica e ao quadro interactivo, para que fosse possível a visualização do gráfico da função e da respectiva tabela, que pudesse ter levado os alunos a construírem uma conjectura não válida.

Professora: ... a função aproxima-se de zero, nunca toca nem nunca toma valores negativos pois nunca intersecta o eixo dos xx. Conclusão se a função não passa o eixo dos xx então em $y = 0$ a função realmente vai ter uma assimptota. Porquê? Porque a função não chega a tocar o eixo dos xx. Deu para entender?
Fausto: Não. Porque a função só tem assimptotas nas interrupções.
Professora: Não penses na interrupção... As assimptotas são valores que a função não toma mas tende para... Atenção, qual é o contradomínio da função?
Elisa: De 0 a mais infinito...
Professora: E o intervalo é fechado ou aberto?
Elisa: É aberto ... $\left]0, +\infty\right[$.
Professora: Então, porque é que colocas aberto?
David: Porque não toca no zero.
Célia: Então tem uma assimptota $y = 0$.
Elisa: Então já está assumido que o -1 não está ali incluído?

Professora: Não estou a entender a vossa dúvida? Vamos novamente á calculadora gráfica. Vamos lá...
Aurora: Oh professora, nós na tabela já conseguimos verificar que tem uma assimptota horizontal!
Professora: Vamos então considerar valores na tabela a começar em -20 até 20, por exemplo ... vamos agora andar ao contrário vamos considerar valores de x negativos... Para $x=0$ dá erro. E o erro na calculadora corresponde a quê?
Alunos: Á assimptota.
Fausto: Oh professora: Em -1 é 1 porquê?
Professora: Para $x=-1$ o $y=1$... Precisamente porque é um ponto da função.
Elisa: Pois professora, mas nós estávamos a referir-nos à assimptota horizontal e não à vertical!
Professora: Vamos então ver... Vem então ao quadro explicar a razão de vocês estarem a contrariar tudo o que foi dito sobre a assimptota horizontal.

Entretanto, Elisa, dirige-se a o quadro interactivo com o intuito de tentar provar a conjectura formulada pelo seu grupo de trabalho. No quadro a aluna limitou-se a desenhar o gráfico de uma função, riscando a parte negativa do eixo dos *yy* referindo que nessa parte a função não estava definida e, assim, não existia uma *"*falha" (fig. 76)..

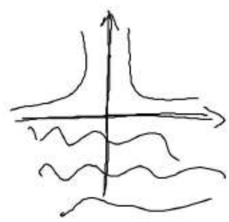


Figura 76. *Flipchart* B da tarefa 4 escrito por Elisa

O facto é que estes alunos nunca se enganaram, nas anteriores tarefas, na determinação das equações das assimptotas, quer verticais quer horizontais, pois nos gráficos das diferentes funções consideradas existiam, no seu entender, sempre "falhas".

Elisa: Isto aqui é a assimptota vertical. É uma interrupção entre duas...
(A aluna passava com a caneta ao longo do eixo dos *yy*)
Elisa: ... e esta aqui é a horizontal e aqui não há nada stora!
Professora: Ah! Até que enfim. Já entendi a vossa dúvida. Ouçam, a definição que vocês consideraram para assimptota nas últimas duas tarefas é que está incompleta. O que é que vamos ter de acrescentar à definição que tínhamos considerado. De que uma assimptota era uma "falha" na função...
Fausto: Temos que acrescentar que uma assimptota é um valor para a qual a função tende mas não toca.
Professora: Muito bem. Então era aí o problema. Eu pensava que vocês já tinham chegado lá!
Fausto: Então assim está certo, professora!
Professora: Exactamente. Até agora as assimptotas foram consideradas as "falhas" conforme denominou o Duarte na primeira tarefa. Obviamente que as assimptotas

não são só as “falhas”. Ficaram agora com mais uma parte da definição de assimptota. É um valor para o qual a função tende mas não toma nesse valor.

Esta parte da discussão desenvolveu-se durante algum tempo, mas a professora investigadora entendeu pertinente que os alunos ficassem sem qualquer dúvida relativamente a um conceito particularmente importante quando se pretende fazer o estudo de qualquer função, nomeadamente das racionais. Após, a construção do conceito de assimptota, em que participaram os alunos e a professora, a discussão desenvolveu-se no sentido de encontrar o domínio de qualquer função g pertencente à família em estudo e, de verificar se o valor do parâmetro a interferia ou não com a equação da assimptota vertical.

Professora: Que mais conclusões é que conseguiram tirar? O domínio é sempre o quê?
Dora: $IR \setminus \{h\}$.
Professora: Então o domínio vai ser sempre $IR \setminus \{h\}$, relativamente à função g.
Elisa: Professora, se nós alterarmos o valor de a, a função dá sempre igual!
Cristina: Não o a interfere na assimptota vertical...
Professora: Coloquem o que vocês disseram na calculadora gráfica.

Para poderem efectuar a prova relativamente à influência do parâmetro a na equação da assimptota vertical, a professora propôs novamente a utilização da calculadora gráfica para que todos os alunos verificassem se o que afirmaram, era válido ou não. De imediato, levantou-se o Raul para colocar na calculadora gráfica, por exemplo, a função $f(x) = 1/2(x-1)^2$ com o intuito de ser possível visualizar o respectivo gráfico.

Professora: Vamos então confirmar se o parâmetro a interfere ou não na assimptota vertical... A assimptota vertical neste caso é ...
Elisa: É $x = 1/2$.
Professora: Será? A assimptota passa então aonde?
Fausto: Passa no 1.
Elisa: Para $x = 1$.
Professora: Então, a asssimptota aqui passa notoriamente no 1, estão a ver? Então a ideia com a qual nós ficamos é que realmente o domínio vai ser $IR \setminus \{h\}$ independentemente de fazermos variar o valor do parâmetro a.

Como a aula estava quase a terminar, a professora começou a incentivar os alunos a não se perderem no seu raciocínio e a apresentarem as restantes conjecturas formuladas.

Professora: Agora, outra situação a função é sempre positiva ou sempre negativa ou...?
Fausto: Se a e k tiverem sinais diferentes ...
Professora: ... se tiverem então sinais diferentes ...
Alguns alunos: ... a função é negativa.
Fausto: ... é negativa e o contradomínio vai de 0 a menos infinito...
Dora: O domínio é IR excepto a assimptota...

Professora: ... e o contradomínio é ...
Elisa: ... $]-\infty,0[$.
Professora: Muito bem...

Os alunos argumentaram relativamente ao domínio, ao contradomínio, à monotonia e ao sinal. No que concerne ao estudo da monotonia da função g, Fausto formulou uma conjectura, que previamente já tinha provado durante o trabalho de grupo que consistia em afirmar que, se a e k tivessem sinais iguais então a função era antes da assimptota vertical, decrescente e após a assimptota, crescente.

Fausto: Professora a monotonia também muda... e o sinal. Se a e k tiverem sinais diferentes, primeiro é decrescente e depois é crescente e a função é negativa... Caso contrário se a e k tiverem sinais iguais, a função é positiva e a monotonia primeiro é crescente e depois é decrescente.
Professora: Então se a e k tiverem sinais iguais a função é ...
Elisa: ... positiva e o contradomínio é $]0,+\infty[$.
Professora: Mais alguma conclusão que vocês tenham tirado?
Fausto: Se o k e o a aumentarem a distancia entre as hipérboles aumenta...
Raul: ...há uma dilatação se o a e o k aumentarem numericamente.

Como até este momento da discussão, não era muito evidente se os alunos entenderam o que é que acontecia na transformação da função f para a g, a professora incentivou os alunos a argumentarem sobre este facto.

Professora: Mas agora uma coisa que eu também queria saber. Da função f para a função g e da função g para a função f, o que é que acontece?
Célia: Há uma translação...
Professora: Associada a que vector? Há uma translação associada a que vector?
Alguns alunos: Ao h.
Aurora: Não percebi, professora.

Como Aurora mostrou não entender ou ter esquecido o conceito de vector, a professora deu uma pequena ajuda referindo que o vector era o responsável pela translação da função f para a g.

Professora: Vejam, nesta tarefa temos uma translação associada ao parâmetro h. Se h for um valor positivo o que é vai acontecer à função?
Raul: Desloca-se para a direita.
Dora: Desloca-se para o primeiro quadrante.
Professora: Ou seja, desloca-se para a parte positiva do eixo dos xx.
Raul: Da esquerda para a direita.
Professora: Se o h for menor que zero ...
Elisa: Vai para a esquerda.
Raul: Desloca-se para a parte negativa do eixo dos xx.
Professora: Exacto, desloca-se para a parte negativa do eixo dos xx.

Na fase final da aula os alunos ainda referiram mais algumas conjecturas testadas durante o trabalho de grupo, a partir do estudo de vários exemplos, com a utilização da calculadora gráfica.

Professora: Então o domínio fica sempre $IR \setminus \{h\}$...
Raul: Dependendo das situações professora.
Professora: Sim...
Raul: Se o valor de h for diferente de zero.
Professora: Exacto. Se o valor de h for diferente de zero obviamente que o domínio vai ser $IR \setminus \{h\}$...
Fausto: Se h for igual a zero o domínio é $IR \setminus \{0\}$.
Raul: Claro que é $IR \setminus \{0\}$. E o contradomínio vai ser IR^{+} neste caso, se k for maior que zero...
Professora: Mas chega considerar $k > 0$ para o contradomínio ser IR^{+}?
Raul: ... também o a.
Professora: Ah. Se o k e o a tiverem sinais ...
Raul: ...iguais.
Professora: ...iguais então é que o contradomínio é ...
Alguns alunos: ...é IR^{+}.
Professora: E se forem de sinais contrários...
Raul: ...é IR^{-}.

Entretanto, os alunos referiram outras conclusões a que chegaram ao efectuarem o estudo desta tarefa 4, mas por falta de tempo e devido a serem demasiado evidentes, nenhuma delas foi verificada.

A calculadora gráfica

No desenvolvimento desta tarefa 4, tal como tinha acontecido nas anteriores investigações a utilização da calculadora gráfica tornou-se um instrumento imprescindível no estudo do comportamento gráfico da família de funções f, e em particular neste estudo, na investigação da transformação gráfica associada à função f.

Contributos

Em todos os momentos da discussão desta tarefa a calculadora gráfica foi um instrumento imprescindível, no teste das conjecturas e na tentativa de efectuar a prova das mesmas. Um dos casos em que se verificou ser importante e relevante a sua utilização, foi quando um aluno afirmou que qualquer função pertencente à família dada na tarefa 4 não tinha assimptota horizontal. A professora, para que todos os alunos testassem a veracidade da conjectura formulada por Raul, activou a calculadora gráfica instalada no quadro interactivo e introduziu uma função f, das mais simples, em que todos os parâmetros eram iguais a um (fig. 77).

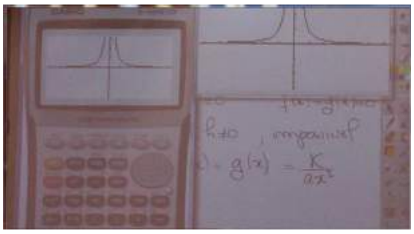


Figura 77. Imagem da calculadora gráfica na tarefa 4

Após a visualização do gráfico da função $f(x)=1/x^2$, os alunos de imediato começaram a apresentar argumentos contra e outros a favor, da conjectura formulada pelo Fausto.

> *Fausto:* Não tem assimptota horizontal pois a função não continua em baixo...
> *Professora:* Atenção tem assimptota horizontal em que caso?
> *Alguns alunos:* Em todos.
> *Fausto:* Em nenhum.
> *Professora:* Então nunca há assimptota horizontal?
> *Célia:* Há professora.
> *Raul:* Há!
> *Professora:* Ora reparem...

A professora para poder esclarecer os alunos sobre a existência ou não de assimptota horizontal, utilizou duas ferramentas da calculadora gráfica, nomeadamente o *menu graph* e o *menu table*.

> *Alexandra:* Mas professora uma assimptota é uma interrupção da função...
> *Fausto:* ...logo a função não tem "falhas" e assim não tem assimptota horizontal.
> *Professora:* Reparem na tabela...Vamos agora considerar valores na tabela a começarem em -20 até 20, por exemplo... vamos fazer entrada ... vamos agora andar ao contrário vamos considerar valores de x negativos... Para $x=0$ dá erro. E o erro na calculadora corresponde a quê?
> *Alunos:* Á assimptota.

Neste excerto da discussão na turma é evidente a utilização da calculadora gráfica, com o intuito de encontrar argumentos que justifiquem o facto de qualquer função da família f ou de g, dada na *tarefa 4* ter sempre uma assimptota horizontal de equação $y=0$. Neste episódio de aula, é notório o contributo da calculadora gráfica para a argumentação matemática, pois os alunos foram incentivados e estimulados, a partir dos resultados obtidos no seu visor, a formular, a testar conjecturas e a partilhá-las com todos os colegas de turma. A utilização da calculadora gráfica durante a investigação da presente tarefa, estimulou, assim, os alunos a desenvolver argumentos, contra ou a favor, dos proferidos pelos seus colegas, desenvolvendo-lhes a capacidade argumentativa em Matemática.

Dificuldades

Nesta tarefa de investigação não foram encontradas dificuldades no desenvolvimento da tarefa, com a utilização da calculadora gráfica. As dificuldades diagnosticadas prenderam-se, essencialmente, na falta de entendimento de alguns conceitos matemáticos que, como não tinham sido ensinados, estavam a ser explorados e construídos pelos próprios alunos com a ajuda da professora. No entanto, e em particular nesta tarefa, a discussão que se desenvolveu na turma pelo facto de os alunos de um grupo terem formulado uma conjectura sobre a não existência de assimptotas horizontais, desencadeou um conjunto de argumentos a favor ou contra, que proporcionou a troca de ideias e assim, o desenvolvimento da argumentação matemática, dos elementos da turma.

5.4.3. Relatório e reflexão

O relatório da investigação da tarefa 4 foi mais fácil de desenvolver do que os anteriores, pois o objectivo principal da duas primeiras investigações era análogo. Como esta investigação pretendia-se que os alunos tomassem consciência, de que nem todas as funções racionais têm o mesmo comportamento quanto à paridade. Nesta tarefa, a família de funções em estudo era par, contrariamente ao que tinha acontecido nas duas primeiras investigações.

A argumentação matemática

Os relatórios individuais desenvolvidos pelos alunos sobre a tarefa 4 foram muito parecidos como os analisados nas duas primeiras tarefas. Neste relatório os alunos argumentam sobre o processo de raciocínio desenvolvido, das conjecturas formuladas as que foram seguidas e as que foram abandonadas bem como, a forma como efectuaram a tentativa de prova dos resultados obtidos, para a família de funções em estudo.

Formulação e teste de conjecturas

Na tarefa 3 como não se tratava da primeira investigação, os alunos nos seus relatórios formulam e testam conjecturas análogas às consideradas na exploração das anteriores tarefas. No entanto, esta tarefa tinha como objectivo que os alunos estudassem o comportamento da família de funções $f(x) = k / ax^2$ e também que investigassem o comportamento da família de funções $g(x)=f(x-h)$, em que a função g era obtida a partir da função f por uma translação associada ao vector $(h,0)$. Os alunos iniciaram os seus relatórios individuais de maneiras diferentes. Nomeadamente, Célia iniciou o seu relatório (fig. 78), referindo que na fase de apropriação da tarefa, o seu grupo pensou que a função $g(x)=k/ax^2-h$, mas com a ajuda da professora, verificaram que estavam errados pois era $g(x)=k/a(x-h)^2$. Posteriormente, referiu que as primeiras conjecturas formuladas foram: se $a=0$ então a função f e g eram impossíveis, se $k=0$ então $f(x)=g(x)=0$ e se $h=0$ então $f(x)=g(x)$.

Iniciamos esta tarefa por tentar perceber como seria a função g(x), pensamos que seria g(x)=(k/ax²) - h .

Com a ajuda da professora percebemos que estávamos errados e que a função seria g (x) = k/a (h - x) ². A partir daí verificamos quais os parâmetros que podiam ter valores igual a zero.

- Se a fosse 0 função desaparece, não existe, é impossível
- Se k fosse 0 f (x) = 0 e g (x) = 0 logo, f (x) = g (x)
- Se h = 0, obtínhamos a função f (x) = g (x)

De seguida fomos formando casos, aumentando os parâmetros e também colocando-os negativos, na máquina calculadora mantinha-mos a função original para comparar as alterações das próximas com essa verificando os gráficos e tirando conclusões registadas nas seguintes tabelas:

Figura 78. Excerto A do relatório da tarefa 4 de Célia

Raul, que pertencia ao grupo de Célia, iniciou o seu relatório com as mesmas conjecturas da colega de grupo (fig. 79), mas argumentou quanto à forma com chegou às conclusões iniciais na investigação da tarefa.

Introdução

Numa primeira introdução face à apresentação da tarefa proposta pela professora em que de maneira a compreender o tema funções racionais foi sugerida a realização desta terceira tarefa de investigação, onde a partir de uma função original f e também uma segunda, é pretendida estudar uma função cujos parâmetros podem ser alterados e assim tiradas conclusões gerais sobre a variação do tipo de funções em questão.

Recorrendo à máquina de calcular gráfica para a realização dos gráficos da função, mas também para outros cálculos necessários relativamente a valores da função em questão, assim é realizada esta terceira tarefa de investigação. A tarefa 3 consiste em após fazermos as nossas conjecturas acerca de uma função, fossem tiradas conclusões acerca da variação desta mesma.

O método optado pelo grupo para a realização desta terceira tarefa foi a atribuição de valores estratégicos a cada parâmetro de maneira a determinar o comportamento da função conforme esses valores e assim poder retirar conclusões relativamente à função.

A tarefa proposta em primeiro lugar foi retirar conclusões sobre a variação desta função. Era pretendido também que fosse estudado o comportamento gráfico da função em causa consoante a alteração de cada um dos parâmetros e assim perceber qual a sua influência na função em causa.

Seja $f(x)=\frac{k}{ax^2}$, com a, k ∈ ℝ, foi considerada a família de funções $g(x)=f(x-h), h \in \mathbb{R}$ e estudada, de maneira a perceber o comportamento gráfico da função consoante a modificação dos parâmetros em causa.

Depois de estabelecer um primeiro raciocínio o grupo chegou à conclusão que

$$g(x)=f(x-h) \Leftrightarrow g(x)=\frac{k}{a(x-h)^2}, a, k, h \in \mathbb{R}$$

Resultados

Para a realização desta tarefa o grupo procedeu ao seguinte raciocínio, atribuiu inicialmente o valor zero a cada um dos parâmetros, isto individualmente, de maneira a ver o comportamento da função, temos então os seguintes três casos que nos fazem perceber um pouco o tipo de comportamento da função. Temos então:

Caso 1

O primeiro parâmetro a ser atribuído o valor zero foi o parâmetro a, desta maneira poderemos ver o resultado do nosso raciocínio inicial e ver qual o resultado da nossa conjectura inicial. Desta forma temos

- Se a=0 e h≠0 e k≠0
- $g(x)=\frac{k}{a(x-h)^2} \Leftrightarrow g(x)=\frac{k}{0(x-h)^2} \Leftrightarrow g(x)=\frac{k}{0}$
- *Função impossível!*

Vemos que esta primeira tentativa de aplicarmos o nosso raciocínio é impossível o que nos leva a tirar uma primeira conclusão acerca desta função que é respectivamente que o parâmetro a tem que ser diferente de zero para a função ser possível.

Caso 2

Neste segundo caso e ainda seguindo a linha de raciocínio tida no caso anterior, é agora atribuído o valor zero ao parâmetro k, isto para tentar perceber qual o resultado dessa suposição. Para melhor comparação e para mais fácil conclusão sobre o tipo de funções em causa é também realizada a suposição para a função f. Assim, será mais fácil ver como varia a função g em relação à função f. Assim temos:

- Se k=0 e a≠0 e h≠0
- $g(x)=\frac{k}{a(x-h)^2} \Leftrightarrow g(x)=\frac{0}{a(x-h)^2} \Leftrightarrow g(x)=0$
- $f(x)=\frac{k}{ax^2} \Leftrightarrow f(x)=\frac{0}{ax^2}=0$

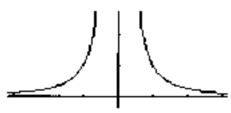
Obtemos então que o resultado de ambas as funções é uma recta horizontal que coincide com o eixo dos xx (eixo das ordenadas) e que ambas as funções são iguais. Este resultado não apresenta grande relevância para o nosso estudo pois não se trata de uma função racional, pelo que rejeitamos totalmente este resultado, de tal forma que também consideramos que k deve ser diferente do valor zero.

Caso 3

Neste terceiro e último caso desta linha de pensamento é, por fim, atribuído o valor zero ao parâmetro h. Pretende-se saber qual a influência deste na função g, visto que este não existe na função f. Desta forma substituímos o parâmetro h pelo valor zero e retiramos conclusões relativamente a esse resultado. Desta forma obtemos:

- Se h=0 e a≠0 e k≠0
- $g(x)=\frac{k}{a(x-h)^2} \Leftrightarrow g(x)=\frac{k}{a(x-0)^2} \Leftrightarrow g(x)=\frac{k}{ax^2}$

Vemos então que a função g, quando o parâmetro h toma o valor zero, é igual à função f, pois possuem a mesma expressão analítica e que assim vão possuir o mesmo domínio o que pela igualdade de funções temos que são iguais. Não há modificação/variação de g em relação a f pelo que também concluímos que será conveniente o parâmetro h não tomar o valor zero. Dessa forma o nosso estudo da função torna-se mais eficaz e pertinente. O gráfico obtido é do tipo:



Inicialmente e devido a uma confusão nos conceitos foi pensado que o gráfico apenas possuía assímptota vertical, não possuindo assimptota horizontal, mas como os valores tendem neste caso para zero vemos que esta função também possui assimptota horizontal

Figura 79. Excerto A do relatório da tarefa 4 de Raul

O aluno apresentou as primeiras conjecturas formuladas pelo seu grupo e, argumentou porque é que umas foram rejeitadas e outras foram seguidas. Posteriormente, Raul foi formulando as suas conjecturas, conforme foi alterando os valores dos parâmetros de acordo com determinadas condições, que foi construindo ao longo da presente investigação (fig. 80).

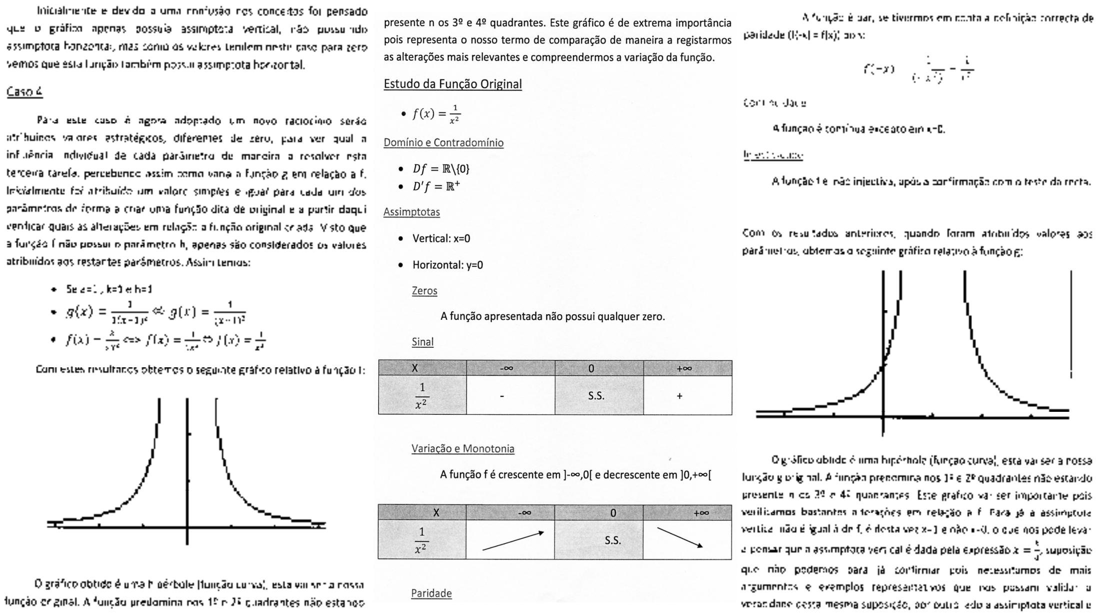


Figura 80. Excerto B do relatório da tarefa 4 de Raul

Para cada caso considerado, Raul efectuou o estudo da função obtida e referiu no seu relatório que o facto de ter considerado apenas quatro exemplos, ainda não podia confirmar a conjectura formulada anteriormente, a que a equação da assimptota vertical era $x = h/a$. Posteriormente, no seu raciocínio o aluno referiu que a conjectura foi refutada pois errou ao escrever a expressão analítica da função g, na calculadora gráfica (fig. 81).

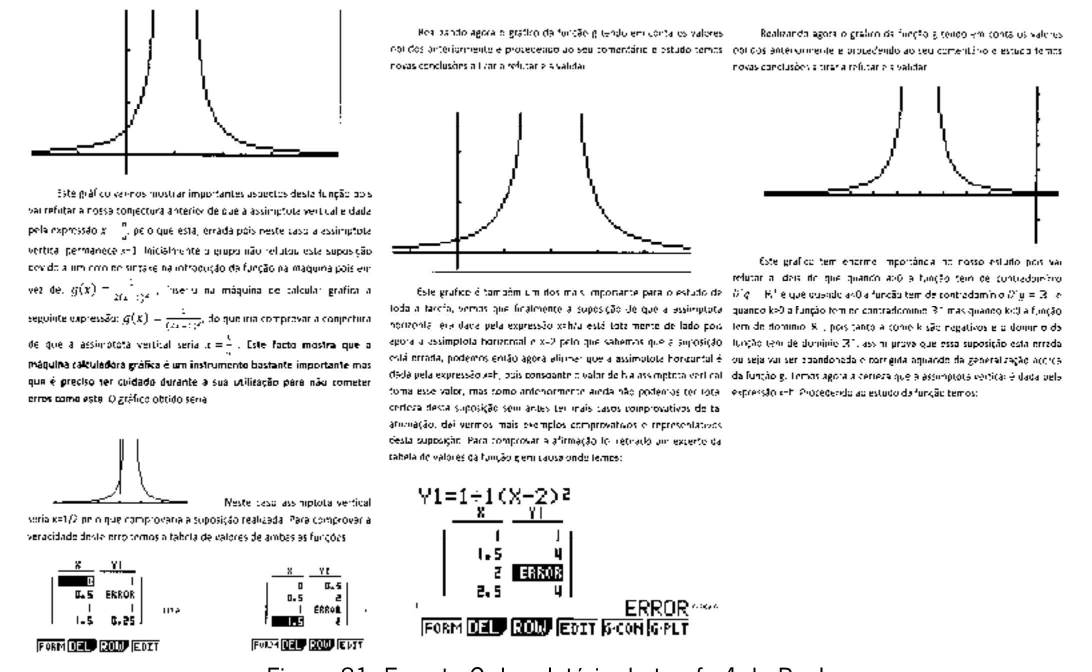
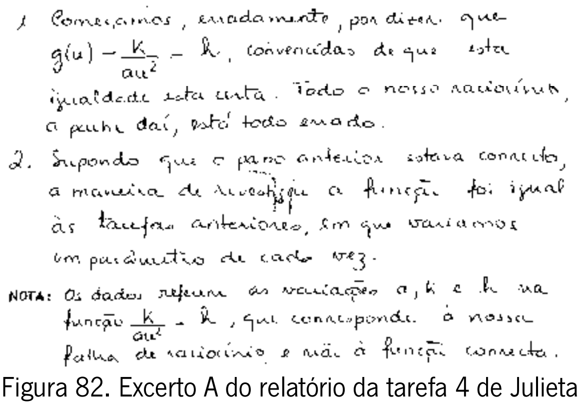


Figura 81. Excerto C do relatório da tarefa 4 de Raul

Uma outra aluna, Julieta, no inicio do seu relatório explicou qual foi o raciocínio desenvolvido pelo seu *grupo 2*, na fase de apropriação da tarefa. Como se verificou em todos os relatórios, esta aluna também salientou o erro efectuado pelo seu grupo na formulação da conjectura inicial relativa à expressão analítica da função g (fig. 82).


1. Começamos, erradamente, por dizer que $g(u) = \frac{k}{au^2} - h$, convencidas de que esta igualdade esta certa. Todo o nosso raciocínio, a partir daí, está todo errado.
2. Supondo que o passo anterior estava correcto, a maneira de verificar a função foi igual às tarefas anteriores, em que variamos um parâmetro de cada vez.

NOTA: Os dados referem as variações a, k e h na função $\frac{k}{au^2} - h$, que corresponde à nossa falha de raciocínio e não à função correcta.

Figura 82. Excerto A do relatório da tarefa 4 de Julieta

De seguida a aluna, Julieta no seu relatório, tal como já havia realizado nos anteriores relativamente às investigações das tarefas 1 e 2, apresentou um quadro síntese relativamente à experiência efectuada pelo seu grupo e respectivas conclusões, para cada caso. No entanto, verificou-se que as alunas na sua investigação formularam inicialmente uma conjectura não válida, ao considerarem como função $g(x) = k / ax^2 - h = f(x) - h$. No seu relatório, independente da não validade da conjectura, a aluna apresentou o raciocínio efectuado pelo seu grupo (fig. 83), que só tomou consciência do erro efectuado na parte final da discussão da tarefa em pequeno grupo.

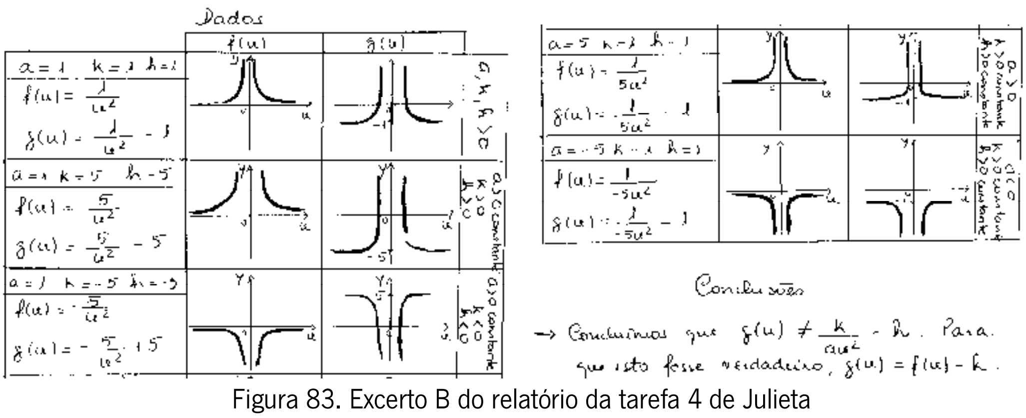
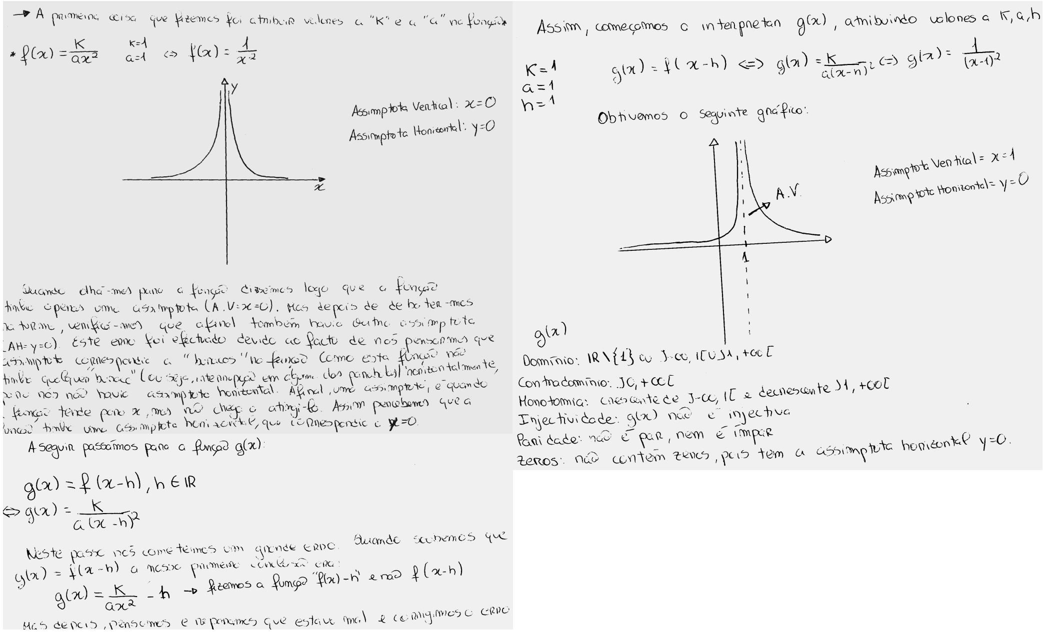


Figura 83. Excerto B do relatório da tarefa 4 de Julieta

Outro aluno, Fausto, iniciou o seu relatório com o estudo da função $f(x) = 1 / x^2$ e, a partir da sua representação gráfica, começou a referir as conjecturas inicialmente formuladas. Os alunos deste grupo referiram que, se o contradomínio da função era $D'_f = \left]0, +\infty\right[$ então o gráfico da função f não tinha assimptota horizontal. Fausto, no inicio do seu relatório referiu esta conjectura, que posteriormente foi abandonada pelo grupo durante a discussão que se desenvolveu na turma. Posteriormente, o aluno salientou que o seu grupo também teve dificuldades em entender o que matematicamente significava a expressão $g(x) = f(x-h)$, ao qual acrescentou, que foi a partir de um esclarecimento da professora, que entenderam que $g(x) = k/a(x-h)^2$. De seguida, o aluno apresentou uma primeira exploração relativamente ao comportamento da função g a partir da função f (fig. 84).



→ A primeira coisa que fizemos foi atribuir valores a "K" e a "a" na função*

* $f(x) = \frac{K}{ax^2}$ $\begin{matrix} K=1 \\ a=1 \end{matrix}$ $\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}$

Assimptota Vertical: $x=0$
Assimptota Horizontal: $y=0$

Quando olhá-mos para a função dissemos logo que a função tinha apenas uma assimptota (A.V: $x=0$). Mas depois de debater-mos na turma, verificá-mos que afinal também havia outra assimptota (AH: $y=0$). Este erro foi efectuado devido ao facto de nós pensarmos que assimptota correspondia a "buracos" na função. Como esta função não tinha qualquer "buraco" (ou seja, interrupção em algum dos ramos [?]) horizontalmente, para nós não havia assimptota horizontal. Afinal, uma assimptota, é quando a função tende para x, mas não chega a atingi-lo. Assim percebemos que a função tinha uma assimptota horizontal, que correspondia a $y=0$.

A seguir passámos para a função $g(x)$:

$g(x) = f(x-h),\ h \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow g(x) = \frac{K}{a(x-h)^2}$

Neste passo nós cometemos um grande erro. Quando soubemos que $g(x) = f(x-h)$ a nossa primeira conclusão era:
$g(x) = \frac{K}{ax^2} - h$ → fizemos a função "$f(x)-h$" e não $f(x-h)$
Mas depois, pensamos e reparamos que estava mal e corrigimos o erro

Assim, começamos a interpretar $g(x)$, atribuindo valores a K, a, h

$K=1$
$a=1$
$h=1$

$g(x) = f(x-h) \Leftrightarrow g(x) = \frac{K}{a(x-h)^2} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

Obtivemos o seguinte gráfico:

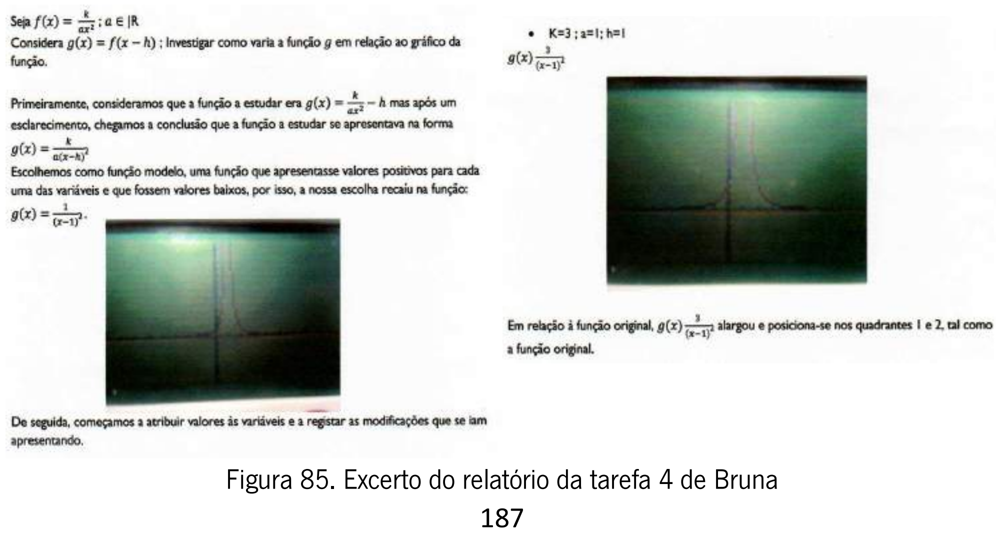
A.V.
1

Assimptota Vertical $= x=1$
Assimptota Horizontal $= y=0$

$g(x)$
Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ou $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$
Contradomínio: $]0, +\infty[$
Monotomia: crescente de $]-\infty, 1[$ e decrescente $]1, +\infty[$
Injectividade: $g(x)$ não é injectiva
Paridade: não é par, nem é ímpar
Zeros: não contém zeros, pois tem a assimptota horizontal $y=0$.

Figura 84. Excerto do relatório da tarefa 4 de Fausto

Uma outra aluna, Bruna, pertencente ao *grupo 6,* iniciou o seu relatório com a atribuição de valores aleatórios aos parâmetros e registo do comportamento gráfico da função obtida, assim, como o seu respectivo estudo (fig. 85). Note-se que os relatórios desenvolvidos pelos elementos deste grupo, foram sempre análogos e limitaram-se em todos os casos a atribuírem valores aleatórios aos parâmetros e a registarem as respectivas conclusões sem argumentarem convenientemente sobre o porquê das conjecturas terem sido seguidas ou simplesmente abandonadas.



Seja $f(x) = \frac{k}{ax^2}$; $a \in |\mathbb{R}$
Considera $g(x) = f(x-h)$; Investigar como varia a função g em relação ao gráfico da função.

Primeiramente, consideramos que a função a estudar era $g(x) = \frac{k}{ax^2} - h$ mas após um esclarecimento, chegamos a conclusão que a função a estudar se apresentava na forma $g(x) = \frac{k}{a(x-h)^2}$
Escolhemos como função modelo, uma função que apresentasse valores positivos para cada uma das variáveis e que fossem valores baixos, por isso, a nossa escolha recaiu na função: $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

De seguida, começamos a atribuir valores às variáveis e a registar as modificações que se iam apresentando.

- K=3 ; a=1; h=1

$g(x) \frac{3}{(x-1)^2}$

Em relação à função original, $g(x) \frac{3}{(x-1)^2}$ alargou e posiciona-se nos quadrantes 1 e 2, tal como a função original.

Figura 85. Excerto do relatório da tarefa 4 de Bruna

No seguimento do seu relatório, Célia, tal como tinha efectuado nas investigações da tarefa 1 e 2, apresentou em tabelas, os vários casos estudados pelo seu grupo e, realizou para cada caso, o respectivo estudo da função obtida (fig. 86).

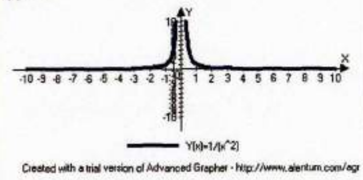
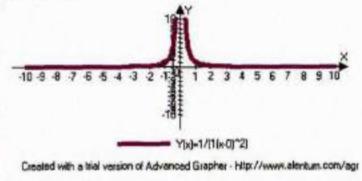
	1º Caso: K=1, a=1, h=0	
	$f(x)=1/x^2$ 	$g(x)=1/(x-0)^2$ 
Domínio	IR\{0}	IR\{0}
Contradomínio	]0, + OO[=IR⁺	]0, + OO[=IR⁺
Assimptota	A.H: y=0 A.V: x=0	A.H: y=0 A.V: x=0
Monotonia	Crescente de] -00, 0 [Decrescente] 0, + 00 [	Crescente de] -00, 0 [Decrescente] 0, + 00 [
Zeros	Não tem zeros	Não tem zeros
Paridade	É par	É par
Injectividade	Não é injectiva	Não é injectiva

Figura 86. Excerto B do relatório da tarefa 4 de Célia

Após a formulação e teste das conjecturas iniciais os alunos tentaram efectuar a prova dos resultados obtidos para a família de funções em estudo e respectiva transformação gráfica.

Da conjectura à prova

Os alunos após atribuírem determinados valores aos parâmetros das funções dadas tentaram provar que os resultados obtidos eram válidos para a família de funções dada na tarefa. Os relatórios apresentam algumas das conjecturas formuladas, e das que foram seguidas efectuaram a prova das conclusões com a utilização da calculadora gráfica. Por exemplo, o aluno Raul após ter formulado as suas conjecturas e testado a validade das mesmas, chegou a uma possível prova ou generalização para a família de funções, dada na tarefa 4 (fig. 87).

Conclusões

- A função é uma hipérbole
- A assimptota horizontal é sempre y=0
- A assimptota vertical é x=0
- O domínio é sempre $Dg = \mathbb{R}\{h\}$
- Quando a>0
  - k>0 a função tem de contradomínio $\mathbb{R}^+$
  - k<0 a função tem de domínio $\mathbb{R}^-$
  - k>0 crescente em]-∞,h[e decrescente em]h,+∞[
  - k<0 decrescente em]-∞,h[e crescente em]h,+∞[
- Quando k>0
  - a>0 a função tem de contradomínio $D'g = \mathbb{R}^+$
  - a<0 a função tem de contradomínio $D'g = \mathbb{R}^-$
  - a>0 crescente em]-∞,h[e decrescente em]h,+∞[
  - a<0 decrescente em]-∞,h[e crescente em]h,+∞[
- Quando a e k têm o mesmo sinal função tem de contradomínio $D'g = \mathbb{R}^-$
- Quando a e k têm sinais diferentes a função tem de contradomínio $D'g = \mathbb{R}$
- Quando k aumenta numericamente há uma dilatação da função
- Quando a aumenta numericamente há uma contracção da função
- A função g é par em relação a x=h
- A função g é não injectiva

Figura 87. Excerto D do relatório da tarefa 4 de Raul

Célia, do mesmo grupo de Raul, apresentou as conclusões obtidas após várias conjecturas formuladas e posteriormente testadas, num quadro síntese (fig. 88).

Consoante a, k e h, mas considerando a e k ≠0	f(x)=k/(ax²)	g(x)=k/(a(x-h)²)
Domínio	Se a e k tiverem sinais iguais IR\{h}	
	Se a e k tiverem sinais diferentes IR\{0}	Se a e k tiverem sinais diferentes IR\{h}
Contradomínio	Se a e k tiverem sinais iguais IR⁺ Se a e k tiverem sinais diferentes IR⁻	
Assimptota Horizontal	y=0	
Assimptota Vertical	x=0	x=h
Monotonia	Se k > 0 Crescente de]-OO , 0[Decrescente de]0 , +OO[	Se k > 0 Crescente de]-OO , h[Decrescente de]h , +OO[
	Se k<0 Decrescente de]-OO , 0[Crescente de]0 , +OO[	Se k<0 Decrescente de]-OO , h[Crescente de]h , +OO[
Zeros	Não tem zeros	
Paridade	É par	É par e relação a h
Injectividade	Não é injectiva	
Continuidade	Contínua excepto 0	Contínua excepto na assimptota

Além disso sabemos que:

- Quando o módulo de k aumenta a função sofre uma dilatação
- Quando o módulo de k diminui a função sofre uma contracção
- Se h>0 a função desloca-se para a parte positiva do eixo das xx's
- Se h<0 a função desloca-se para a parte negativado eixo das xx's

<u>Atenção</u>: Tudo o que fui registando nas tabelas em relação à assimptota vertical não está de acordo com as conclusões que tiramos da aula, pois pensávamos que ela era (h/a), devido a um erro colocado na máquina calculadora. Em relação à assíntota vertical também não é o que tínhamos concluído, pois pensávamos que não existia, devido a uma definição incorrecta da mesma.

Figura 88. Excerto C do relatório da tarefa 4 de Célia

Outros alunos efectuaram raciocínios semelhantes ao da Célia, apresentando também tabelas síntese, sobre o estudo completo da família de funções, em estudo nesta tarefa. Estes quadros foram elaborados, após terem efectuado um estudo exaustivo de vários exemplos, que proporcionaram e estimularam a formulação, teste e tentativa de prova das conjecturas formuladas, durante a investigação realizada em pequeno grupo.

Os restantes alunos da turma produziram relatórios com raciocínios semelhantes aos excertos apresentados, mas em alguns casos com referências às conjecturas seguidas e não às abandonadas, assim como, por vezes, não argumentaram o porquê das opções tomadas durante a presente investigação ou não tomaram a iniciativa de validar os argumentos apresentados.

Neste relatório os alunos também tinham que efectuar uma reflexão sobre a tarefa de investigação desenvolvida. Júlia referiu que teve mais dificuldades em explorar esta tarefa, devido ao conceito de assimptota que tinha sido construído na turma e ainda estava um pouco incompleto, diz mesmo "ao iniciarmos a tarefa tivemos algumas dificuldades em perceber que o gráfico da função *g* continha uma assimptota horizontal, visto que a definição que tínhamos de assimptota, não estava totalmente correcta" (reflexão de Júlia). Salientou, também que "discutimos raciocínios e chegamos a conclusões em comum acordo" que discutiram entre todos os elementos do grupo e, chegaram às conclusões da tarefa em conjunto, com organização, empenho e respeito mútuo.

Elisa, do mesmo grupo de Júlia, considerou a tarefa 4 "mais trabalhosa do que as duas anteriores, mas mesmo assim foi de fácil resolução" (reflexão de Elisa), pois o comportamento gráfico desta família de funções era ligeiramente diferente. A aluna salientou que a maior dificuldade que sentiu foi na fase de apropriação da tarefa quando era necessário definir a expressão analítica da função g. Relativamente à discussão na turma é de opinião que todos os alunos respeitaram e completaram "as ideias uns dos outros", que posteriormente foram "muito úteis para o relatório" individual sobre a presente tarefa. Elisa referiu também a importância da realização de tarefas de investigação em que os alunos são estimulados a construírem o seu próprio conhecimento. Salientou que este tipo de tarefas desenvolve nos alunos "um sentido de auto-suficiência, autonomia e investigação" e faz com que as aulas se tornem "mais atractivas" desenvolvendo as capacidades dos alunos enquanto estudantes e investigadores.

Raul na sua reflexão referiu também que "esta quarta tarefa era um bocado mais complexa" que as anteriores "pois requeria o estudo de duas funções, bem como a relação de vários conceitos sobre funções racionais" (reflexão de Raul). Raul salientou também a importância de se ter efectuado uma discussão na turma após o trabalho em pequeno grupo, pois possibilitou aos alunos a partilha de raciocínios, intercâmbio de ideias e correcção da escrita matemática, diz mesmo: "devido a um erro de escrita o grupo foi induzido em erro durante um certo raciocínio pelo que a existência de uma discussão e debate após a realização da tarefa 4, ajudou bastante e provou ser necessária pois o erro foi corrigido a tempo da realização do relatório, o que demonstra a importância do intercâmbio de ideias" (reflexão de Raul).

Célia, do mesmo grupo de Raul, salientou também que esta tarefa "foi um pouco mais difícil que as outras, porque tínhamos que saber relacionar a função $g(x)$ com a $f(x)$" (excerto de Célia), precisando da ajuda da professora, para a determinar a função g. Referiu que um erro de raciocínio desenvolvido pelo grupo foi o de terem pensado que a família de funções dada, não tinha assimptota horizontal. Esta aluna Célia salientou também a importância de aprender com os erros cometidos durante cada uma das investigações, como forma de não os esquecer e de não os repetir.

Outra aluna, Aurora, na sua reflexão considerou que um dos defeitos do seu grupo foi o de não terem participado activamente na discussão da turma, pois limitaram-se a concordar com as ideias que os outros alunos iam referindo, diz mesmo que "o principal defeito do nosso grupo é não interagir muito durante a participação, limitamo-nos a concordar ou discordar do que é dito" (reflexão de Aurora). Aurora, salientou também que os raciocínios que foram partilhados durante a discussão na turma, foram análogos aos desenvolvidos pelo seu grupo de trabalho e que este foi um dos motivos que os levou a não participar tanto.

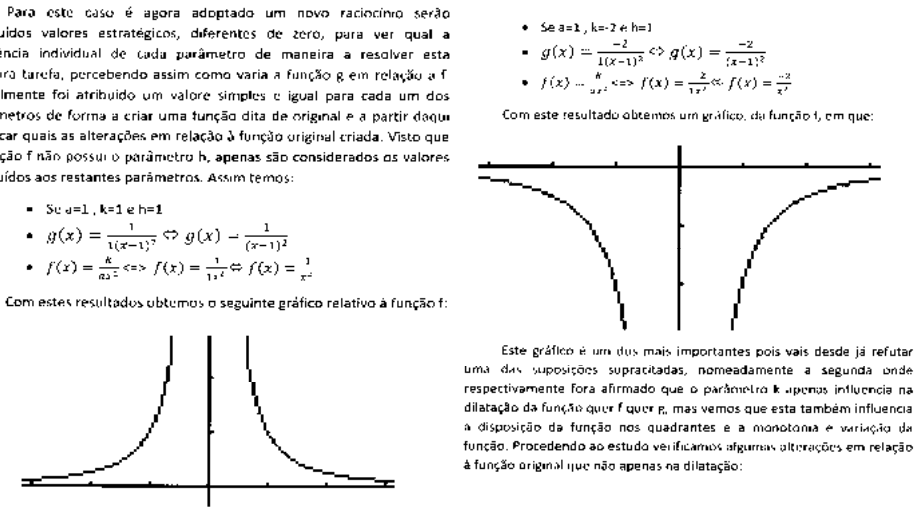
Note-se que, em quase todas as reflexões, os alunos estão de acordo quanto ao grau de dificuldade desta tarefa e que a partir desta discussão na turma ficaram a entender melhor o conceito de assimptota. Salientam também que apesar de este conceito já ter sido estudado e discutido nas anteriores tarefas, foi com a presente investigação que a definição ficou completa.

A calculadora gráfica

Como nas anteriores tarefas, a calculadora gráfica foi utilizada desde o inicio da investigação sempre que era necessário tentar provar a validade de uma determinada conjectura. Os relatórios foram elaborados a partir dos resultados obtidos da visualização e confirmação na calculadora gráfica, ou seja, dos gráficos das diferentes funções resultantes da variação dos valores dos parâmetros na família de funções dada.

Contributos

Os contributos da utilização da calculadora gráfica durante a tarefa foram relativos à possibilidade de validação e de prova das conjecturas formuladas durante a investigação.



Para este caso é agora adoptado um novo raciocinio serão atribuidos valores estratégicos, diferentes de zero, para ver qual a influência individual de cada parâmetro de maneira a resolver esta terceira tarefa, percebendo assim como varia a função g em relação a f Inicialmente foi atribuido um valore simples e igual para cada um dos parâmetros de forma a criar uma função dita de original e a partir daqui verificar quais as alterações em relação à função original criada. Visto que a função f não possui o parâmetro h, apenas são considerados os valores atribuídos aos restantes parâmetros. Assim temos:

- Se a=1 , k=1 e h=1
- $g(x) = \frac{1}{1(x-1)^2} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$
- $f(x) = \frac{k}{ax^2} <=> f(x) = \frac{1}{1x^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}$

Com estes resultados obtemos o seguinte gráfico relativo à função f:

- Se a=1 , k=-2 e h=1
- $g(x) = \frac{-2}{1(x-1)^2} <> g(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$
- $f(x) = \frac{k}{ax^2} <=> f(x) = \frac{-2}{1x^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{-2}{x^2}$

Com este resultado obtemos um gráfico, da função f, em que:

Este gráfico é um dos mais importantes pois vais desde já refutar uma das suposições supracitadas, nomeadamente a segunda onde respectivamente fora afirmado que o parâmetro k apenas influencia na dilatação da função quer f quer g, mas vemos que esta também influencia a disposição da função nos quadrantes e a monotonia e variação da função. Procedendo ao estudo verificamos algumas alterações em relação à função original que não apenas na dilatação:

Figura 89. Excerto E do relatório da tarefa 4 de Raul

No relatório de Raul, é evidente o contributo da calculadora gráfica como forma dos alunos puderem formular, testar e provar as suas conjecturas através da visualização e confirmação das representações gráficas das diferentes funções pertencentes à família da tarefa 4 (fig. 89).

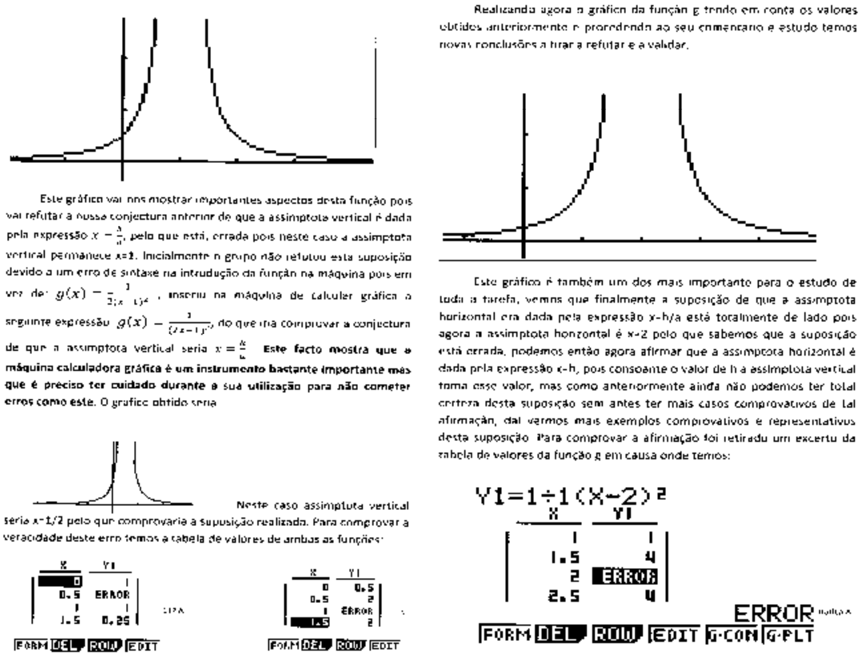
Os alunos nos seus relatórios realizaram uma reflexão sobre a utilização da calculadora gráfica durante a investigação da tarefa. Júlia considerou que a calculadora gráfica, relativamente ao comportamento gráfico das funções em estudo na tarefa 4, ajudou a realizar uma investigação mais elaborada, detalhada e desta forma, melhor entendida pelos alunos, diz mesmo "a realização destas tarefas de investigação, com recurso à calculadora gráfica permitiu-me uma maior facilidade em trabalhar com a mesma, o que na minha opinião é bastante beneficiador, durante a discussão da turma pois a tarefa é melhor explorada e entendida" (reflexão de Júlia). Salientou também que, estas tarefas lhe desenvolveram a autonomia e a sua capacidade de trabalhar em grupo. Este aspecto da reflexão torna-se importante realçar, pois Júlia era uma das alunas que tinha mais dificuldades em aprender matemática, assim como era muito introvertida, o que não se veio a registar durante o desenvolvimento das investigações. Esta aluna tornou-se mais activa, participativa e autónoma durante o desenvolvimento destas tarefas.

Um outro aluno, Raul considerou, que a calculadora gráfica é uma ferramenta essencial na validação ou rejeição das conjecturas formuladas durante a investigação. Refere mesmo que "a calculadora gráfica representa uma ferramenta essencial para a compreensão de toda esta tarefa bem como para a validação ou rejeição das nossas conjecturas" (reflexão de Raul). Este excerto da reflexão de Raul realça, novamente, a importância do contributo, da calculadora gráfica, no desenvolvimento das capacidades argumentativas dos alunos. Este instrumento desempenhou um papel importante, quando os alunos sentiram a necessidade de formular e de testar as suas conjecturas, de modo a verificar a validade das mesmas.

Os restantes alunos foram unânimes relativamente à importância da utilização da calculadora gráfica no desenvolvimento das tarefas de investigação. Consideram que a utilização da calculadora gráfica instalada no quadro interactivo contribuiu para o desenvolvimento da discussão na turma pois todos os alunos têm a possibilidade de visualizar e partilhar os seus raciocínios com os restantes colegas.

Dificuldades

Apenas Raul referiu uma dificuldade na utilização da calculadora gráfica durante a investigação da tarefa. Este aluno considera que é preciso ter cuidado com a utilização da calculadora gráfica para que não sejam cometidos erros, como por exemplo, na equação das assimptotas.



Este gráfico vai nos mostrar importantes aspectos desta função pois vai refutar a nossa conjectura anterior de que a assimptota vertical é dada pela expressão $x = \frac{h}{a}$, pelo que está, errada pois neste caso a assimptota vertical permanece x=1. Inicialmente o grupo não refutou esta suposição devido a um erro de sintaxe na introdução da função na máquina pois em vez de: $g(x) = \frac{1}{2(x-1)^2}$, inseriu na máquina de calcular gráfica a seguinte expressão $g(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$, do que iria comprovar a conjectura de que a assimptota vertical seria $x = \frac{h}{a}$. **Este facto mostra que a máquina calculadora gráfica é um instrumento bastante importante mas que é preciso ter cuidado durante a** sua **utilização para não cometer erros como este.** O gráfico obtido seria

Neste caso assimptota vertical seria x=1/2 pelo que comprovaria a suposição realizada. Para comprovar a veracidade deste erro temos a tabela de valores de ambas as funções:

X	Y1
0	1
0.5	ERROR
1	1
1.5	0.25

FORM DEL ROW EDIT

X	Y1
0	0.5
0.5	2
1	ERROR
1.5	2

FORM DEL ROW EDIT

Realizando agora o gráfico da função g tendo em conta os valores obtidos anteriormente e procedendo ao seu comentário e estudo temos novas conclusões a tirar a refutar e a validar.

Este gráfico é também um dos mais importante para o estudo de toda a tarefa, vemos que finalmente a suposição de que a assimptota horizontal era dada pela expressão x=h/a está totalmente de lado pois agora a assimptota horizontal é x=2 pelo que sabemos que a suposição está errada, podemos então agora afirmar que a assimptota horizontal é dada pela expressão x=h, pois consoante o valor de h a assimptota vertical toma esse valor, mas como anteriormente ainda não podemos ter total certeza desta suposição sem antes ter mais casos comprovativos de tal afirmação, daí vermos mais exemplos comprovativos e representativos desta suposição. Para comprovar a afirmação foi retirado um excerto da tabela de valores da função g em causa onde temos:

Y1=1÷1(X−2)²

X	Y1
1	1
1.5	4
2	ERROR
2.5	4

ERROR

FORM DEL ROW EDIT G-CON G-PLT

Figura 90. Excerto F do relatório da tarefa 4 de Raul

Note-se que o aluno ao introduzir na calculadora gráfica a expressão algébrica da função alterou a colocação dos parênteses, por distracção, portanto não deve ser considerada como uma dificuldade na utilização deste instrumento tecnológico, mas como um lapso de raciocínio ou erro na escrita matemática. Assim, o erro não foi da máquina mas sim do aluno (fig. 90).

Na sua reflexão, Raul considerou novamente que os alunos devem ter especial cuidado na introdução da expressão algébrica das funções na calculadora gráfica, nomeadamente, no que se refere aos parênteses, pois pode implicar a formulação de conjecturas não válidas, levando a serem cometidos erros de raciocínio. Diz mesmo que "a calculadora gráfica embora fosse um instrumento indispensável e bastante pertinente é também uma ferramenta que necessita de ser manuseada correctamente pois pequenos erros podem levar a resultados completamente distintos do que os que queremos obter, pelo que demonstra a importância do cuidado com que as funções devem ser inseridas na máquina de calcular" (reflexão de Raul).

Síntese

Na investigação desta tarefa, os alunos manifestaram algumas dificuldades na interpretação do enunciado devido a, para além de terem de estudar a influência da alteração dos valores dos parâmetros no gráfico de uma função, tinham também de efectuar o estudo de uma transformação gráfica. As dificuldades registaram-se apenas na fase de apropriação da tarefa, quando tentaram escrever a expressão analítica da função g. Após esta barreira ter sido ultrapassada, com a ajuda da professora investigadora, efectuaram a investigação da tarefa, normalmente sem revelarem dificuldades na generalização dos resultados para a família de funções em estudo.

Relativamente à argumentação matemática, verificou-se que os alunos evoluíram no desenvolvimento desta capacidade nos seus trabalhos, quer em pequeno grupo quer em grande grupo. No entanto, durante a discussão em turma surgiu uma dúvida que só foi diagnosticada nesta fase da investigação, relativamente à existência de assimptota horizontal. Verificou-se que o conceito de assimptota, ainda não estava completamente construído até à exploração desta tarefa, pois os alunos quando nas tarefas anteriores afirmaram a existência de assimptotas, justificavam este facto devido ao gráfico das funções obtidas terem todas uma " falha" ou "buraco" em determinado ponto. No entanto, estas condições formuladas pelos alunos para definirem o conceito de função só foram completadas com a exploração desta tarefa, em que contrariamente ao que tinha sido estudado nas anteriores, o gráfico da família de funções era par, caso o valor do parâmetro $h = 0$. Nos relatórios individuais verificou-se que todos os alunos reflectiram e argumentaram relativamente às dificuldades iniciais diagnosticadas, nomeadamente, no que se refere à existência e determinação das equações das assimptotas horizontais. Como no anterior relatório, os alunos descreveram pormenorizadamente todo o processo de investigação argumentando relativamente às conjecturas seguidas e às abandonadas. No que se refere às conjecturas seguidas, os alunos registaram os testes efectuados para a sua validação e novamente sentiram a necessidade de provar generalizando os resultados obtidos para a família de funções em estudo.

Na exploração desta tarefa não foram observadas quais quer dificuldades na utilização da calculadora, revelando-se novamente um importante instrumento para a formulação, teste e prova das conjecturas formuladas pelos alunos, apoiando e estimulando os alunos a argumentarem matematicamente.

5.5. Síntese Comparativa das tarefas realizadas

De seguida, é efectuada uma análise comparativa da sequência de tarefas efectuada durante o presente estudo relativamente às categorias de análise, argumentação matemática e calculadora gráfica, nos três momentos em que decorreu a investigação (trabalho de grupo, discussão na turma e relatório com reflexão). Esta análise comparativa tem como objectivo um cruzamento dos dados obtidos nos diferentes momentos da investigação e pretende estar de acordo com o objectivo e as questões de investigação deste estudo.

Para a realização deste trabalho recorreu-se a vários instrumentos, em que todos tinham um objectivo comum, que consistia em compreender o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente, dos alunos, ao longo da realização de uma sequência de tarefas com a utilização da calculadora gráfica.

A argumentação matemática

O cruzamento dos dados obtidos a partir da análise dos trabalhos desenvolvidos em pequeno grupo, das discussões em grande grupo e dos relatórios individuais realizados pelos alunos e respectiva reflexão sobre o trabalho desenvolvido permitem observar que os resultados obtidos têm aspectos comuns, no que se refere ao desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente dos alunos da turma em estudo. Permitem também evidenciar a evolução dessa capacidade ao longo da experiência.

Durante a implementação da sequência de tarefas, verificou-se que os alunos foram sentindo, progressivamente a necessidade de testar as conjecturas formuladas encontrando para tal argumentos válidos de forma a validá-las ou a rejeitá-las. Na primeira tarefa, constatou-se que os alunos ainda não tinham grande facilidade em argumentar relativamente a cada um dos resultados obtidos no decorrer da investigação. Este facto, foi mais evidente nos primeiros relatórios realizados pelos alunos, que eram menos ricos em termos de argumentação matemática, pois estes não sentiram a necessidade de fundamentar os seus raciocínios limitando-se a apresentar vários exemplos e posteriormente obter generalizações para a família de funções em estudo. Quando a professora na primeira tarefa pediu à maioria dos alunos para reformularem os seus relatórios de forma a apresentarem os argumentos que os levaram a aceitar ou rejeitar determinadas conjecturas, verificou-se que nos segundos relatórios foi evidente uma melhoria na capacidade de argumentar matematicamente, fundamentando assim, todos os raciocínios efectuados no decorrer da exploração da tarefa.

Ao longo das restantes tarefas verificou-se que os alunos já tiveram algum cuidado em argumentar matematicamente, quer na discussão em pequeno e em grande grupo quer na elaboração do relatório, explicitando todos os raciocínios desenvolvidos, conjecturas formuladas e rejeitadas, assim como, sentiram a necessidade de provar a sua validade, que nas primeiras tarefas foi efectuada por generalização dos resultados a partir da análise de vários exemplos criteriosamente escolhidos pelos alunos.

As tarefas elaboradas e implementadas pela professora investigadora, por serem de carácter investigativo permitiu que os alunos sentissem maior liberdade na sua exploração, pois não previam quais as condições que deveriam impor para que fosse mais fácil efectuar o seu estudo. Para além deste facto, há a referir que os todos os alunos tiveram contacto com o tema das funções racionais pela primeira vez e assim, não previam quais as conclusões possíveis para as tarefas propostas.

A calculadora gráfica

O facto da sequência de tarefas ter sido elaborada, pela professora investigadora, de modo a que os alunos pudessem explorar as suas potencialidades, verificou-se que estes desenvolveram, no decorrer da experiência, um maior espírito crítico relativamente aos resultados que o visor da calculadora gráfica mostrava. Para estes alunos bastou apenas a exploração da primeira tarefa para que resolvessem algumas das suas lacunas relativamente a um melhor manuseamento e exploração da calculadora gráfica de forma válida e útil. Nas restantes tarefas, nos diferentes momentos em que decorreu a investigação constatou-se que os alunos deixaram de ter dificuldades no uso da calculadora gráfica, apesar de denotarem alguma dificuldade em interpretar o que visualizavam, devido a lacunas em alguns conceitos matemáticos anteriormente aprendidos.

Verificou-se também, que com a calculadora gráfica criaram-se oportunidades para o desenvolvimento e exploração das tarefas propostas, envolvendo activamente os alunos na formulação e teste de conjecturas, assim como nas tentativas de efectivar uma prova matematicamente válida. A calculadora gráfica facilitou a colaboração e discussão dos alunos quer em pequeno grupo quer em grande grupo, quando testaram e partilharam os seus raciocínios matemáticos, particularmente quando foi usado no quadro interactivo. Assim, a calculadora gráfica foi considerada nesta investigação como uma ferramenta com a potencialidade de mediar e ajudar os alunos no desenvolvimento das suas aprendizagens, nomeadamente, no que se refere à capacidade de argumentar matematicamente.

CAPÍTULO 6

Conclusões do estudo

Este capítulo está organizado em três secções. Na primeira é efectuada uma síntese do trabalho desenvolvido, focando os objectivos do estudo, as questões de investigação que lhe estão subjacentes assim como a metodologia adoptada. Na segunda secção são apresentadas as conclusões e a discussão dos resultados. Na terceira secção, são apresentadas algumas sugestões para futuras investigações. Por último, na quarta secção, é apresentada uma reflexão final do estudo.

6.1. Síntese do estudo

O presente estudo teve como objectivo compreender o desenvolvimento da capacidade de argumentar em Matemática, de uma turma do 11.º ano, ao longo da realização de uma sequência de tarefas com a utilização da calculadora gráfica. Este estudo pretendeu também estudar o contributo da utilização da calculadora gráfica no desenvolvimento dessa capacidade. A partir destes objectivos, esta experiência, procurou dar resposta às seguintes questões de investigação:

a) Como evolui a capacidade de argumentar matematicamente, dos alunos de uma turma do 11.º ano ao longo da realização de uma sequência de tarefas?

b) De que forma a utilização da calculadora gráfica pode contribuir para o desenvolvimento da capacidade de argumentar matematicamente, dos alunos de uma turma do 11.º ano?

A sequência de tarefas foi elaborada pela professora investigadora com o intuito de que cada uma delas estivesse adequada ao nível cognitivo dos alunos e que os desafiasse intelectualmente.

As tarefas foram propostas aos alunos para serem trabalhadas em três fases distintas da investigação. Numa primeira fase, os alunos em pequenos grupos discutiram, argumentaram e elaboraram possíveis soluções para cada uma das tarefas. Posteriormente, numa segunda fase, foi efectuada, para cada tarefa, uma discussão com toda a turma, sobre os resultados obtidos por cada um dos grupos. Finalmente, numa terceira fase, cada aluno tinha de elaborar um relatório detalhado sobre todo o processo de investigação, argumentando sobre as conjecturas seguidas e sobre as que foram abandonadas. Nesse relatório, os alunos tinham também de tentar efectuar a prova das suas conjecturas, assim como deveriam realizar uma reflexão crítica e autocrítica sobre todo o trabalho desenvolvido.

Considerando os objectivos do presente trabalho e as respectivas questões de investigação, adoptou-se uma metodologia de carácter qualitativo e descritivo, em que uma turma do 11.º ano deu origem à realização de um estudo de caso. Com o intuito de efectuar uma análise detalhada de todos os dados deste estudo foram adoptadas diferentes técnicas de recolha de dados: observação com gravações áudio e vídeo das aulas em que decorreu a investigação (discussões em pequeno grupo e em grupo turma) e documentos escritos elaborados por cada um dos alunos (relatório e reflexão).

No presente estudo, a análise de dados foi realizada ao longo de todo o processo de investigação e de acordo com as categorias de análise previamente elaboradas pela professora investigadora, nomeadamente: a argumentação matemática (formulação e teste de conjecturas e da conjectura à prova) e a calculadora gráfica (contributos e dificuldades). Estas categorias foram analisadas no contexto de trabalho de grupo, no espaço de discussão de toda a turma, e nos relatórios e respectivas reflexões.

6.2. Conclusões e discussão dos resultados

Nesta secção, são apresentadas as principais conclusões da experiência efectuada com alunos de uma turma do 11.º ano e estabelecem-se algumas conexões com trabalhos desenvolvidos por outros autores, que foram relatados nos capítulos iniciais desta dissertação. Para melhor se compreender como é que os alunos evoluíram na capacidade de argumentar em Matemática, ao longo da realização da sequência de tarefas e de que forma a calculadora gráfica contribuiu para o desenvolvimento desta capacidade, a investigadora apresenta, de seguida, as conclusões deste estudo, relativamente às diferentes fases em que decorreu a investigação (discussão em pequenos grupo, discussão em toda a turma e relatório e reflexão individual), e de acordo com as categorias de análise consideradas (a argumentação matemática - formulação e teste de conjecturas e da conjectura à prova; e a calculadora gráfica - contributos e dificuldades).

6.2.1. A argumentação matemática

As orientações curriculares do novo programa de Matemática para o ensino básico consideram que os alunos devem, desde os primeiros anos de escolaridade, ser estimulados e incentivados a fundamentar e a explicitar os seus raciocínios (Ponte et al., 2007). Para o ensino secundário, as orientações curriculares mantêm-se desde 1997, não tendo sido ainda ajustadas, ainda atribuem pouco destaque à importância e necessidade de desenvolver nos alunos a capacidade de argumentar em Matemática.

Com este estudo, pretendeu-se contribuir para uma alteração da forma de leccionação de uma unidade curricular. Com este intuito, a professora investigadora planificou o tema das funções racionais de modo a estimular e incentivar os alunos a produzirem a sua aprendizagem de forma autónoma, activa e crítica. Ao colocar os alunos a realizarem a investigação em três fases distintas, ou seja, primeiro com o trabalho em pequenos grupos, seguida da discussão com toda a turma e finalmente com a elaboração de um relatório e de uma reflexão individual, a investigadora teve como intenção de, para além de os incentivar a produzir o seu próprio conhecimento, os estimular a desenvolver a capacidade de argumentação em Matemática. Como a experiência se desenvolveu em três diferentes fases, a investigadora entendeu proceder à sua análise, também de forma independente.

Verificou-se neste estudo que os alunos considerados, à partida, pela professora investigadora, como alunos com dificuldades, quer na compreensão quer no raciocínio matemático, vieram a revelar-se casos de sucesso nesta investigação. Este facto confirma-se, em diferentes momentos neste estudo, nos vários casos destacados pela professora investigadora, quer pela forma como detalhadamente elaboraram o seu relatório, quer pelo modo e pelos argumentos que apresentaram na sua reflexão relativamente ao trabalho desenvolvido por si e pelo seu grupo de discussão. São vários os alunos que na reflexão sobre as diferentes tarefas, fazem referência à importância da cooperação, da inter-ajuda e da troca de ideias no desenvolvimento dos raciocínios. A partir das reflexões individuais, é possível depreender que a interacção entre os alunos e o tipo de dinâmica que foi criada em torno da argumentação em matemática foi promotora de uma aprendizagem significativa Forman et al. (1998).

Os alunos, de uma forma geral, gostaram de desenvolver as tarefas em grupo pois consideraram que os trabalhos de investigação desenvolvidos em grupo tornaram-se mais fáceis de executar devido à possibilidade de partilha de ideias e da inter-ajuda entre os seus elementos. Salientam também, que com o desenvolvimento de trabalhos em grupo podem ser atingidos determinados objectivos que dificilmente conseguiriam alcançar, caso a investigação fosse realizada individualmente. Conforme opinião de outros autores, os alunos que partilham as suas ideias e raciocínios são co-responsabilizados a participar na construção do seu conhecimento e da dos seus pares (Ponte & Serrazina, 2000; Boavida & Fonseca, 2009).

O facto das tarefas elaboradas para este estudo terem sido de carácter investigativo, revelaram-se um incentivo à exploração de forma autónoma, para que fossem os próprios alunos a construir a sua aprendizagem e ao mesmo tempo a desenvolver as suas capacidades argumentativas. Os estudos desenvolvidos por Boavida et al. (2002) apontam no mesmo sentido, visto que os alunos ao desenvolverem actividades de cariz investigativo são responsabilizados e estimulados a saber e a entender a necessidade de fundamentar os seus raciocínios, de explicar o porquê de determinados resultados assim como de entender os argumentos apresentados pelos seus colegas. Assim, as tarefas de carácter investigativo revelaram-se, neste estudo, importantes para a auto-aprendizagem de cada um.

Durante a implementação da sequência de tarefas foi evidente que todos os alunos progressivamente foram tendo mais cuidado na formulação e teste das suas conjecturas, em apresentar argumentos que as validassem pois, caso contrário, tinham de ser rejeitadas ou reformuladas e a sentirem a necessidade, tomando a iniciativa, de provar a validade das suas conjecturas. À semelhança de um estudo de Boavida (2005b), verificou-se que, como as tarefas implementadas envolveram os alunos na argumentação matemática e em experiências de prova, desencadearam a necessidade de testarem a validade ou a não validade das suas conjecturas.

Neste estudo, constatou-se que a maioria dos alunos gostou de realizar a exploração da sequência de tarefas, manifestando a vontade de realizar novas experiências sobre outras tarefas do mesmo tipo, sobre outros temas do programa, em futuras aulas. Salientam também, nas suas reflexões, que a implementação de tarefas de cariz investigativo como forma de aprender novos conceitos nas aulas de Matemática, são formas diferentes de aprendizagem que entusiasmam os alunos, pelo facto de promoverem e estimularem o diálogo entre colegas, fazendo com que a matemática seja uma disciplina "mais divertida".

Os momentos de discussão em grande grupo revelaram-se importantes para os alunos, pelo facto de tornar possível ouvir a opinião, a explicação das ideias e os raciocínios dos restantes colegas da turma. Os alunos salientaram também, que com a discussão com toda a turma, foram alcançadas algumas das conclusões, às quais dificilmente chegariam, caso os trabalhos tivessem sido apenas desenvolvidos em pequenos grupos. Assim, quando são implementadas tarefas de investigação em duas fases distintas, uma destinada ao trabalho de grupo e outra ao grupo turma, criam-se oportunidades de argumentação, em que os alunos são incentivados a formularem e testarem conjecturas, analisando exemplos e contra-exemplos e a utilizarem argumentos válidos, de formas a convencerem-se a si próprios e os restantes colegas de grupo (Ponte et al., 1997; Boavida, 2005b; Whitenack & Yackel, 2008).

Portanto, pelo facto das tarefas terem sido desenvolvidas e discutidas em grande grupo possibilitou um melhor entendimento, compreensão e partilha do que tinha sido desenvolvido nos pequenos grupos. Algumas conjecturas formuladas e testadas em pequeno grupo foram reformuladas e algumas até foram provadas, aquando da discussão na turma, pois todos partilharam opiniões e argumentos que os ajudaram a desenvolver a capacidade de argumentar matematicamente. Estes resultados estão em consonância com as ideias imanadas por Ponte e Serrazina (2000) e por Whitenack e Yackel (2008), pois quando os alunos argumentam em Matemática, para além de partilharem as suas respostas também explicam e justificam as suas ideias e a forma como pensaram e desenvolveram a tarefa proposta.

Ao longo da sequência de quatro tarefas, os alunos demonstraram e evidenciaram evolução. Esta evolução verificou-se, na facilidade com que os alunos progressivamente se apropriaram e exploraram cada uma das tarefas da sequência, no que concerne à forma como formularam e testaram as suas conjecturas, nos argumentos que apresentaram de modo a validá-las, assim como ao sentirem e ao evidenciarem a necessidade de efectuar a sua prova. Esta conclusão do estudo vai ao encontro da opinião proferida por Doeuk (1999), que considera que, na sala de aula, devem ser incluídas, de uma forma sistemática, actividades de argumentação e de validação dos resultados para que os alunos desenvolvam a capacidade de argumentação em Matemática.

Com este estudo podemos reforçar a ideia de que, para que os alunos, progressivamente, desenvolvam alguma facilidade em argumentar matematicamente é realmente importante que, na sala de aula, se concretizem actividades de carácter sistemático. O facto dos alunos terem sido incentivados e estimulados a explicar os seus raciocínios utilizando argumentos válidos foi evidente e vem no mesmo sentido do apresentado por Boavida et al. (2008). No caso dos alunos da turma em estudo, como já se tratava do segundo ano em que professora investigadora leccionava a disciplina de Matemática A, foram desenvolvendo a capacidade de argumentar desde o 10.º ano. Esta prática era comum, nas suas aulas, pois sistematicamente a professora incentivava os alunos a explicar os seus raciocínios aos restantes colegas, independentemente do tipo de tarefa desenvolvida.

Na realização do primeiro relatório, alguns alunos sentiram dificuldades em descrever todo o processo investigativo, pois não conseguiram apresentar argumentos suficientes sobre o porquê de validar ou de não validar, determinadas conjecturas previamente formuladas. É de realçar também, que alguns alunos não apresentaram as conjecturas que foram rejeitadas pelo seu grupo de trabalho. Em particular, uma aluna na sua reflexão salienta que os erros cometidos pelo seu grupo durante o trabalho foram essenciais para o seu desenvolvimento e poderão ser uma preciosa ajuda nas investigações seguintes. Após a análise do primeiro relatório, a investigadora alertou os alunos para não terem receio em explicar e em argumentar relativamente aos erros cometidos durante a realização de diferentes tarefas pois as concepções erradas e os erros de raciocínio fazem parte do processo construtivo da matemática (Vincent et al., 2005).

Relativamente ao processo argumentativo que nesta investigação foi analisado em duas fases, formulação e teste de conjecturas e da argumentação à prova, verificou-se que nas três primeiras tarefas, a maioria dos alunos efectuou a prova das suas conjecturas por generalização, considerando e analisando as regularidades de vários e diversificados exemplos. No entanto, neste estudo, verificou-se que, um número reduzido de alunos, tentou encontrar as soluções para as três primeiras tarefas observando um pequeno número de exemplos, que consideram ser suficientes, para provar a validade das suas conclusões. Boavida et al. (2008) chegaram à mesma conclusão, ao considerarem que a maior parte dos alunos, quando sente a necessidade da prova, efectuam-na por generalização a partir da análise de vários exemplos e contra-exemplos e em que alguns deles persistem na ideia, de que basta apenas o estudo de um número pequeno de casos.

Na quarta tarefa, a maioria dos alunos conseguiu provar a existência de apenas três soluções, com o recurso à calculadora gráfica e tentaram também efectuar a prova de algumas das suas conjecturas, analiticamente. No entanto, pela análise geral das tentativas de prova desenvolvidas pelos alunos, continua a persistir uma certa dificuldade na verdadeira prova matemática das conjecturas formuladas. Mas, conforme estudos desenvolvidos por Rodd e Monagham (2002), a aprendizagem da prova de uma forma matematicamente aceitável, é difícil para os alunos do ensino secundário.

Em conclusão, os alunos da turma em estudo desenvolveram progressivamente, durante a exploração da sequência de tarefas, a sua capacidade de argumentar em Matemática. No entanto, constatou-se que é necessário desenvolver um trabalho mais intenso e diversificado de modo a, progressivamente, incutir nos alunos a necessidade da prova como forma de validar as conjecturas formuladas.

6.2.2. A calculadora gráfica

No presente estudo os alunos foram incentivados, pelo tipo de tarefa proposta, a utilizar a calculadora gráfica nos diferentes momentos em que decorreu a experiência. Durante a exploração de cada uma das tarefas, observou-se que apenas na realização da primeira os alunos sentiram alguma dificuldade no seu manuseamento, nomeadamente, só recorreram à *menu table* quando a professora investigadora os incentivou a fazê-lo.

Em todas as tarefas foram vários os contributos da utilização da calculadora gráfica, quer na discussão em pequeno e em grande grupo, quer na verificação e teste das suas conjecturas, assim como nas tentativas que os alunos desenvolveram no sentido de elaborar uma prova matematicamente válida. Os alunos ao utilizarem as potencialidades da calculadora gráfica, progressivamente foram adquirindo uma atitude mais crítica e reflexiva em relação às tarefas de investigação propostas, tentando encontrar possíveis regularidades na descoberta de soluções e na formulação das respectivas conclusões. Este facto é destacado por Gracias e Borba (2000) que consideram que quando se implementam tarefas de investigação, na sala de aula, em que se potencie o uso da calculadora gráfica, criam-se oportunidades de aprendizagem, no que se refere à discussão, exploração e compreensão de conceitos matemáticos.

A calculadora gráfica revelou-se uma ferramenta fulcral para os alunos na medida em que os ajudou na compreensão da tarefa, assim como na validação ou rejeição das conjecturas que previamente foram formuladas, desenvolvendo a capacidade de argumentar em matemática. É de salientar, a importância deste instrumento, do ponto de vista dos alunos, para o sucesso da investigação, pois foi a partir da sua utilização que foi possível construir e visualizar os gráficos de diferentes funções e através da sua análise, formular conjecturas e tentativas de prova. Outros estudos apontam no mesmo sentido ao revelarem que o processo de elaboração de hipóteses, teste de conjecturas, refutação e generalização, é possível ser efectuado de forma mais rápida e eficiente devido às potencialidades da calculadora gráfica na produção de vários gráficos, estimulado assim, a investigação matemática (Dugdale, 1993; Jensen & Williams, 1993; Gracias & Borba, 2000).

Neste estudo, foi notório que a calculadora gráfica contribuiu para a realização das tarefas, dado que os alunos ao terem a possibilidade, de mais rapidamente, visualizar os vários gráficos, individualmente ou em simultâneo, das diferentes funções, evidenciaram uma melhoria das suas aprendizagens. Esta opinião é reiterada por Demana e Waits (1992), pois consideram que a calculadora gráfica é um instrumento que pode ajudar os alunos numa melhor compreensão de alguns conceitos devido à possibilidade de visualização enquanto fazem matemática.

Observou-se também que a calculadora gráfica ajudou os alunos a explicar e a concluir, relativamente às várias características associadas às funções, nomeadamente, domínio e contradomínio, intervalos de monotonia, pontos de intersecção com os eixos coordenados, existência de assimptotas, sinal e paridade. No mesmo sentido aponta o estudo desenvolvido por Alves (2000).

Assim, neste estudo foi notória, a importância da utilização da calculadora enquanto instrumento impulsionador e incentivador na formulação, teste e tentativa de prova das conjecturas formuladas pelos alunos em cada uma das tarefas. Os alunos desenvolveram os seus argumentos a partir da verificação no visor da calculadora dos exemplos e dos contra-exemplos que foram considerando como forma de formularem e testarem as suas conjecturas.

Apesar das diversas potencialidades da calculadora gráfica, alguns alunos constataram que é necessário ter algum cuidado na sua utilização, pois consideraram que é fundamental ter um espírito crítico relativamente à janela de visualização, que necessita de ser escolhida para cada situação. Rocha (2000), num estudo por si desenvolvido, também verificou que a calculadora gráfica deve ser utilizada como um instrumento que desenvolva nos alunos a capacidade de reflectirem, sendo críticos relativamente aos resultados obtidos no seu visor.

Neste estudo, verificou-se que a calculadora gráfica não desempenhou o papel de instrumento facilitador da aprendizagem, mas o de mediador no processo de investigação, fundamental na construção de novos conceitos matemáticos e estimulando os alunos a desenvolver o seu próprio conhecimento matemático. A implementação de tarefas de carácter investigativo incentivou os alunos a utilizar a calculadora gráfica de modo a ser tirado o máximo partido das suas potencialidades.

Nesta experiência, a calculadora gráfica revelou-se detentora de um grande potencial no âmbito de uma aprendizagem centrada no aluno e na sua compreensão dos conceitos. Ao ser implementada pela professora investigadora uma sequência de tarefas, em que era fundamental a utilização da calculadora gráfica na sua investigação, verificou-se que para além da sala de aula se ter transformado num laboratório de matemática, os alunos demonstraram prazer e entusiasmo no trabalho desenvolvido. Alguns alunos afirmaram, que a realização de tarefas de investigação com recurso à calculadora gráfica em pequeno e em grande grupo, permitiu desenvolver a sua autonomia e aptidão para futuras explorações, quer individuais quer em grupo. Demana e Waits (2000) consideram também que a intensificação da utilização da calculadora gráfica na sala de aula é importante para que os alunos desenvolvam uma atitude mais positiva, relativamente à disciplina de Matemática.

Como a calculadora gráfica permitiu obter gráficos de uma forma mais rápida, os alunos tiveram a possibilidade de a partir da visualização e da comparação das diferentes representações gráficas, desenvolver argumentos matematicamente válidos de forma a testar as suas conjecturas. A calculadora gráfica proporcionou assim, aos alunos a realização das tarefas de carácter investigativo de uma forma mais eficiente e crítica e num curto espaço de tempo. Neste estudo, verificou-se que os alunos recorreram a este artefacto sempre que sentiram a necessidade de verificar a validade das suas conjecturas. Assim, constatou-se que a utilização da calculadora gráfica possibilitou e incentivou os alunos a argumentar de forma crítica relativamente às possíveis soluções das diferentes tarefas.

Em conclusão, esta experiência pretendeu contribuir para um melhor entendimento da forma como a calculadora gráfica pode ser utilizada na sala de aula de modo a promover e estimular os alunos a desenvolver argumentos válidos para explicarem os seus raciocínios.

6.3. Recomendações e reflexão

Com este estudo a professora investigadora pretendeu contribuir para uma melhor compreensão da forma como os alunos desenvolvem a sua capacidade de argumentar em Matemática ao longo da exploração de uma sequência de tarefa com a utilização da calculadora gráfica. A investigadora pretendeu também sensibilizar a comunidade cientifica relativamente à necessidade de alteração do currículo no ensino secundário tal como já aconteceu no ensino básico, de modo a que se conceda, na sala de aula, um lugar de destaque à importância de incentivar os alunos a desenvolver a sua capacidade argumentativa, devido a estar intimamente relacionada com a capacidade de raciocinar matematicamente.

Em Portugal, são poucas as investigações que se debruçam sobre a argumentação, principalmente no ensino secundário. Este estudo suscita novas propostas de trabalho e de investigação. De forma particular, revela-se necessária a existência de mais investigações em torno da capacidade de argumentar em Matemática dos alunos, em diferentes momentos da aula de Matemática, durante a implementação de diferentes tipos de tarefas e em diferentes temas do programa do ensino secundário. Estes trabalhos de investigação poderiam ser, assim, mais direccionados para ajudar a compreender como é que os alunos pensam e quais são os argumentos que apresentam relativamente ao que pensam.

Como a investigação seguiu uma metodologia de carácter qualitativo, interpretativo e descritivo, em que o estudo de caso incidiu sobre uma turma do 11.º ano, os resultados não podem ser generalizáveis. No entanto, o objectivo deste estudo, não era o de obter dados generalizáveis, pois a intenção era o de obter dados coerentes e consistentes que pudessem constituir novas hipóteses de trabalho, assim como, serem aplicados a outras situações e utilizados noutros trabalhos de investigação.

Esta experiência é um incentivo a uma alteração das práticas lectivas, dentro da sala de aula. Com este estudo, a professora autora desta dissertação, consolidou o seu papel como professora e como investigadora, pois este trabalho marcou o inicio de uma nova etapa na sua prática lectiva, assim como, alterou de forma significativa a sua forma de pensar, de ser, de estar e de agir.

REFERÊNCIAS

Alexander, M. (1995). The effective use of computers and graphing calculators in college algebra. Proceedings of the Sixth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics (pp.410-414). USA: Addison-Wesley Publishing Company.

Alibert, D., & Thomas, M. (1991).Research on mathematical proof. In David Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.215-230). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education. Intention, reflection, critique.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Alves, A. J. C. (2000). *O conceito de função em professores - estagiários de matemática: um estudo de caso em supervisão.* Lisboa: APM.

Antão, J. A. S. (1993). *Comunicação na sala de aula.* Porto: Edições Asa.

Antonini, S. (2003). Non – Examples and proof by contradiction. In Neil A. Pateman, Barbara J. Dougherty & Joseph T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA, Volume 2* (pp.49-55). Honolulu: CRDG, College of Education of University of Hawai´i.

Antonini, S., & Mariotti, M. A. (2006). Reasoning in an absurd world: Difficulties with proof by contradiction. In Jarmila Novotná, Hana Moraová, Magdalena Krátká & Nad'a Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 2* (pp.65-72). Prague: PME.

APM (2009). *Renovação do currículo de Matemática. Seminário de Vila Nova de Milfontes – 1998. Edição comemorativa.* Lisboa: APM.

Arends, R. I. (2008). *Aprender a ensinar.* Madrid: McGraw-Hill Interamericana de España, SAU.

Araújo, J. L. (2004). Um diálogo sobre a comunicação na sala de aula de matemática. *Veritati, 4*, 81 – 93.

Azzolino, A. (1990). Writing as a tool for teaching mathematics: The silent revolution. In T. Cooney & C. Hirsch (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics in the 1990´s*. Reston: NCTM.

Ayalon, M., & Even, R. (2006). Deductive reasoning: Different conceptions and approaches. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 2* (pp.89-96). Prague: PME.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils´ practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp.216-235). London: Hodder and Stoughton.

Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate... *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.* Retirado em 1 de Janeiro de 2010 de http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/contentstorage01/.

Barron, A. E., & Hynes, M. C. (1996). Using technology to enhance communication mathematics. In Elliot P. C. & Kenney M. J. (Eds.), *Communication in mathematics, K-12 and Beyond* (pp. 126-136). USA: NCTM.

Blanton, M. L., & Katput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36* (5), 412 – 446.

Blunk, M. L. (1998). Teacher talk about how to talk in small groups. In M. Lampert & M. L. Blunk (Eds.), *Talking mathematics in school: studies of teaching and learning (pp. 190-212).* Cambridge: University Press.

Boavida, A. M., Gomes, A., & Machado, S. (2002). Argumentação na aula de matemática. Olhares sobre um projecto de investigação colaborativa. *Educação e Matemática, 70*, 18-26.

Boavida, A. M. (2005a). A argumentação na aula de matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. In A. M. Boavida, C. Delgado, F. Mendes, J. Brocardo, J. Torres, J. Duarte & T. O. Duarte, *Actas XVI SIEM* (pp. 13-43). Évora: APM.

Boavida, A.M. (2005b). *A argumentação em matemática. Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração.* Lisboa: Universidade de Lisboa.

Boavida, A. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática, 100*, 1.

Boavida, A. M. R., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência matemática no Ensino Básico. Programa de formação contínua em Matemática para professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Boavida, A. M., Silva, M., & Fonseca, P. (2009). Pequenos investigadores matemáticos. Do pensamento à comunicação e da comunicação ao pensamento. *Educação e Matemática, 102*, 2-10.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2006). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Breiteig, T., & Grevholm, B. (2006).The transition from arithmetic to algebra: To reason, explain, argue, generalize and justify. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 2* (pp.225-232). Prague: PME.

Briedenbach, D. E., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Education Studies in Mathematics, 23*, 247 – 285.

Bright, G. W., & Williams, S. E. (1995). Research and evaluation: Create a complete picture of the impact of calculator use on mathematics teaching and learning. In Lewis Lum (Ed.), *Proceedings of the Sixth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (pp. 88-98). USA: Addison-Wesley Publishing Company.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: Um projecto curricular no 8.º ano*. Lisboa: APM.

Burril, G. (1992). The graphing calculator: A tool for change. In Christian R. Hirsch (Ed.), *Calculators in Mathematics Education – 1992 Yearbook* (pp.14-22). USA: NCTM.

Burril, G., Allison, J., Breaux, G., Kastberg, S., Leatham, K. & Sanchez, W. (2002). *Handheld graphing technology in secondary mathematics: Research findings and implications for classroom practice.* Michigan: Michigan State University.

Cai, J., Lane, S., & Jakabcsin, M. S. (1996).The role of open-ended tasks and holistic scoring rubrics: Assessing students´ mathematical reasoning and communication. In Portia C.

Elliott & Margaret J. Kenney (Eds.), *Communication in Mathematics, K-12 and Beyond* (pp.137-145). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Campos, C., Neves, A., Fernandes, D., Conceição, J. M., & Alaiz, V. (1995). Avaliação formativa: algumas notas. In *Pensar avaliação, melhorar a aprendizagem.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional (IIE).

Caraça, B. J. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa: Gradiva.

Cardoso, M. T. P. (1995). *O papel da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos de análise matemática: estudo de uma turma do 11º ano de escolaridade.* Lisboa: APM.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp.669-705). New York, NY: Macmillian.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: Teacher Understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education & Development, 5*, 3 - 18.

Civil, M. (1998). Mathematical communication through small-group discussions. In H. Steinbring, M. G. B. Buss & A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (pp.223-234). Reston: NCTM.

Cohen, L., & Manion, L. (1992). *A guide to teaching practice.* London: Routledge.

Crespo, C. C., Farfán, R. M., & Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latino de Investigación en Matemática Educativa, 12* (1), 29-66.

Cunningham, S., & Zimmermann, W. (1991). Editors introduction: What is mathematical visualization? In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning Mathematics* (pp.1-8). USA: Mathematical Association of America.

Curcio, F. R., & Artzt, A. F. (1998). Students communicating in small groups: Making sense of data in graphical form. In H. Steinbring, M. G. B. Buss & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp.179-190). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Demana, F., & Waits, B. K. (1992). A computer for all students*. The Mathematics Teacher, 85* (2), 94-95.

Demana, F., Schoen, H., & e Waits, B. (1993). Graphing in the k-12 curriculum: The impact of the graphing calculator. In T. A. Romberg, E. Fennema & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp.11-39). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Dick, T. (1992). Super calculators: Implications for calculus curriculum, instruction and assessement. In C. R. Hirsch (Ed.), *Calculators in Mathematics Education* (pp.145-157). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Doerr, H. M., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Sudies in Mathematics, 42(2)*, 143-160.

Douek, N., & Scali, E. (2000). About argumentation and conceptualization. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *volume 2* (pp.249-256). Japan: Hiroshima.

Douek, N., & Pichat (2003). From oral to written texts in grade I and the approach to mathematical argumentation. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA, Volume 2* (pp.341-348). Honolulu: CRDG, College of Education of University of Hawai´i.

Douek, N. (2005). Communication in the mathematics classroom. Argumentation and development mathematical knowledge. In A. Chronaki & I. M. Christiansen (Eds.), *Challenging Perspectives on Mathematics Classroom Communication* (pp.145-172). USA: IAP.

Domingos, A. (2008). As funções. Um olhar sobre 20 anos de ensino aprendizagem. In A. P. Canavarro (Org.), *20 anos de temas na E e M* (pp.126-136). Lisboa: APM.

Domingues, M. F. F. C. (1999). *A calculadora gráfica no ensino/aprendizagem de funções: uma experiência no ensino superior politécnico.* Lisboa: APM.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp.113-134). Cambridge U. K.: Cambridge University Press.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can´t prove. In D. Tirosh (Ed.). *Forms of mathematical knowledge. Learning and teaching with understanding* (pp.85-107). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Drijvers, P., & Doorman, M. (1996). The graphics calculator in mathematics education*. Journal of Mathematical Behavior, 15*, 425-440.

Dugdale, S. (1993). Functions and graphs – Perspectives on student thinking. In T. A. Romberg, E. Fennema & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp.101-130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Dunham, P., & Dick, T. (1994). Research on graphing calculators. *Mathematics Teacher, 87* (6), 440-445.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 233-261.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Suisse: Peter Lang Edition.

Duval, R. (1999). Questioning argumentation. *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof.* Retirado em 18 de Junho de 2009 de http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeUK.htm.

Embse, C. B. V. (1992). Concept development and problem solving using graphing calculators in the middle school. In C. R. Hirsch (Ed.), *Calculators in mathematics education – 1992 Yearbook* (pp.65-78). USA: NCTM.

Fernandes, J. A. (1998). Tecnologia gráfica no estudo de classes de funções. *Educação e Matemática, 46*, 33-36.

Fernandes, D. (2008). A calculadora: SIM ou NÃO no 1° ciclo do ensino básico? *Educação e Matemática, 96*, 20-21.

Fonseca, H. I. C. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula*. Lisboa: APM.

Fonseca, L. (2009). Comunicação matemática na sala de aula. Episódios do 1.º ciclo do Ensino Básico. *Educação e Matemática, 103*, 2-6.

Forman, E. A., Larreamendy-Joeens, J., Stein, M. K., & Brown, C. A. (1998). You´re going to want to find out which and prove it: Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction, 8* (6), 527-548.

Gholamazad, S., Liljedahl, P., & Zazkis, R. (2003). On line proof: What can go wrong? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the international group for the psychology of mathematics education held jointly with the 25th conference of PME-NA, Volume 2* (pp.437-443). Honolulu: CRDG, College of Education of University of Hawai´i.

Giamati, C. (1990). The effect of graphing calculator use on students´ understanding of variations on a family of equations and the transformations of their graphs. *Dissertation Abstracts International, 52* (1), 103-A.

Gómez, P. (1996). Graphing calculators and mathematics education in developing countries. In P. Goméz & B. Waits (Eds.), *Roles of calculators in the classroom* (pp.59-70). New York: State University of New York Press.

Gracias, T. S., & Borba, M. C. (2000). Explorando possibilidades e potenciais limitações da calculadoras gráficas. *Educação Matemática, 56*, 35-39.

Grácio, R. A. (1993). *Racionalidade argumentativa*. Porto. Edições Asa.

Grácio, R. A. (1998). *Consequências da retórica. Para uma valorização do múltiplo e do controverso.* Coimbra: Pé de Página Editores.

Greenes, C., & Findell, C. (1999). Developing student´s algebric reasoning abilities. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades k-12* (pp.127-137). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Grize, J. B. (1996). Loguique naturelle et communications. Paris: Presses Universitaires de France.

Groves, S. (1994). Using graphic calculators to support investigative learning. In T. Andrews & B. Kissane (Eds.), *Graphic calculators in the classroom* (pp. 127-132). Adelaide: AAMT.

Hadji, C. (2001). Que relação com o verdadeiro envolve o acto educativo? Prova, acção educativa e saber: da questão da prova à questão dos saberes úteis do educador. In C. Hadji & J. Baillé (Orgs.), *Investigação e Educação. Para uma "nova aliança"- 10 questões acerca da prova* (pp.73-84). Porto: Porto Editora.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.54-61). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 421-438.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.). *International handbook of mathematics education* (pp.877-908). London: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students´ proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, Volume 3* (pp.234-283). USA: American Mathematical Society in Cooperation with Mathematical Association of America.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31* (4), 396-428.

Hector, J. H. (1992). Graphical insight into elementary functions. In C. R. Hirsch (Ed.), *calculators in mathematics education – 1992 Yearbook* (pp.131-137). USA: NCTM.

Hembree, R., & Dessart, D. (1992). Research on calculators in mathematics education. In J. Fey & C. Hirsch (Eds.), *Calculators in Mathematics Education* (pp.23-32). Reston, VA: NCTM.

Hirschhorn, D., & Thompson, D. (1996). Technology and reasoning in algebra and geometry. *The mathematics teacher, 89* (2), 138-142.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 123 – 134.

Inácio, M. A. (1998). A professora e os erros dos alunos. *Educação e Matemática, 48*, 19-21.

Johnstone, H. W. (1992). Algumas reflexões sobre argumentação. In Associação de Professores de filosofia (Org.), *Caderno de filosofias: Argumentação, retórica, racionalidades* (pp.39-53). Coimbra: Associação de Professores de Filosofia.

Jensen, R. J., & Williams, B. S. (1993). Technology: Implications for middle grades mathematics. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp.225-243). New York: Macmillan and Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Jones, P. L. (1995). Realising the educational potentional of the graphics calculator. In L. Lum (Ed.), *Proceedings of the sixth annual international conference on technology in collegiate mathematics* (pp. 212-217). USA: Addison-Wesley Publishing Company.

Kaber, L., & Longhart, K. (1995). Using graphing calculators to teach high school mathematics. In D. Thomas (Ed.), *Scientific visualization in mathematics and science teaching* (pp.19-25). Charlottesville, VA: Association for the Advancement of Computing in Education.

Kaldrimidou, M., & Ikonomou, A. (1998). Epistemological and metacognitive factors involved in the learning of Mathematics: The Case of graphic representations of functions. In H. Steinbring, M. G. B. Buss & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp.271-288). Reston: NCTM.

Knipping, C. (2004). Argumentations in proving discourses in mathematics classroom. In G. Tőrner, R. Bruder, A. Peter-Koop, N. Neill, H. Weigand, & B. Wollring (Eds.), *Developments in mathematics education in German-speaking countries* (pp. 73-84). Ludwigsburg: Verlag Franzbecker, Hildesheim.

Krummheuer, G. (1998). Formats of argumentation in the mathematics classroom. In H. Steinbring, M. G. B. Buss & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp.207-222). Reston: NCTM.

Lakatos, I. (1976). *Preuves et réfutations. Essais sur la loguique de la découverte mathématique*. Paris: Hermann.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching.* New Haven, CT: Yale University Press.

Larsen, S., & Zandich, M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 205-216.

Lauten, A., Graham, K., & Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basics calculus concepts: Interaction with graphics calculator. *Journal of mathematical Behavior, 13*, 268-273.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research 60* (1), 1-64.

Ludke, M., & André, M. E. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Mamede, E. (2002). A calculadora no 1.º ciclo: Mero instrumento de verificação ou algo mais? In J.P. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores.* (pp. 113-124). Lisboa: SEM/SPCE.

Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the learning of Mathematics, 6* (2), 18-24.

Martinho, M. H. (2007). *A comunicação na sala de aula de matemática: Um projecto colaborativo com três professores do ensino básico.* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically.* Bristol: Addison-Wesley.

Matos, J. F. (1995). *Modelação matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Menezes, L. (1999). Matemática, linguagem e comunicação. In *Actas do ProfMat99* (pp.71-81). Lisboa: APM.

Menezes, L. (2005). Desenvolvimento da comunicação matemática em professores do 1.º ciclo no contexto de um projecto de investigação colaborativa. In A. M. Boavida, C. Delgado, F. Mendes, J. Brocardo, J. Torres & T. O. Duarte (Org.), *Actas do XVI SIEM* (pp. 349-364). Lisboa: APM.

Menino, H. A. L. (2004). *O relatório escrito, o teste em duas fases e o portefólio como instrumentos de avaliação das aprendizagens em matemática.* Lisboa: APM.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Mett, C. (1987). Writing as a learning device in calculus. *Mathematics Teacher, 80* (7), 534-537.

Ministério da Educação (1997). *Matemática – Programa do 10.º, 11.º e 12.º ano.* Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do Ensino Básico. Competências essenciais.* Lisboa: Departamento da Educação Básica, Ministério da Educação.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Direcção Geral da Inovação e do Desenvolvimento Curricular, Ministério da Educação.

Moura, A. C. F. (2005). *Trabalho colaborativo de professores: a utilização da calculadora na aula de matemática*. Lisboa: APM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática.* Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Oléron, P. (1983). *A argumentação.* Lisboa: Publicações Europa – América.

Oliveira, H. (1998a). Vivência de duas professoras com as actividades de investigação. *Quadrante, 7* (2), 71-98.

Oliveira, H. M. (1998b). *Actividades de investigação na aula de Matemática: aspectos da prática do professor.* Lisboa: APM.

Pedemonte, B. (2002). Relation between argumentation and proof in mathematics: cognitive unity or break? In J. Novotná (Ed.), Proceedings (pp.70-80). Prague: Charles University, Faculty of Education.

Penglase, M., & Arnold, S. (1996). The graphics calculator in mathematics education: a critical review of recent research. *Mathematics Education Research Journal, 8* (1), 58 – 90.

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (1988). *Traité de L´argumentation: la nouvelle rhetorique.* Bruxelles: Éditions de L´Université de Bruxelles.

Perelman, C. (1993). *O império retórico. Retórica e argumentação.* Porto: Edições Asa.

Perez, F., & Diogo, M. (2005). Aprender matemática reflectindo. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.217-247). Lisboa: APM.

Perrenoud, P. (2003). Dez princípios para tornar o sistema educativo mais eficaz. In G. Ramalho, A.T. Ferrer, & F. Perrenoud, (Orgs.), *Avaliação dos resultados escolares. Medidas para tornar o sistema mais eficaz* (pp.103-126). Porto: Edições Asa.

Pimm, D. (1996). Diverse communications. In P. Elliot & M. Kenney (Eds.), *Communication in mathematics k-12 and beyond. Yearbook* (pp. 11-19). Reston, VA: NCTM.

Pires, M. (2002). A diversificação de tarefas em matemática no ensino secundário: Um projecto de reflexão acção. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp.125-154). Lisboa: APM.

Polya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics*

Ponte, J. P. (1984). *Functional reasoning and the interpretation of cartesian gaphs.* Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, *3*, 1-16.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na educação matemática. *Quadrante, 3* (1), 3-18.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp.5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Org.), *O professor e o Desenvolvimento Curricular* (pp.11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da matemática*. *Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação. Departamento do Ensino Secundário.

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2006). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Ponte, J. P., Ferreira, C., Varandas, J. M., Brunheira, L., & Oliveira, H. (1999). A relação professor - aluno na realização de investigações matemáticas. Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L., & Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação, 20* (2), 39-74.

Ponte, J. P., & Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante, 7* (1), 3-32.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Putman, R., Lampert, M., & Petersen, P. L. (1990). Alternative perspectives of knowing mathematics in elementary schools. *Review of research in education, 16*, 57-143.

Quesada, A. R. (1996). On the impact of first generation of graphing calculators on the mathematics curriculum at the secondary level. In P. Gomez & B. Waits (Eds.), *Roles of calculators in the classroom* (pp.143-164). New York: State University of New York Press.

Recio, A. M., & Godino, J. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 48* (1), 83 – 99.

Reis, R. (2004). Desenvolvimento do raciocínio matemático. Lisboa: Universidade Aberta.

Rich, B. S. (1991). The effect of the use of graphing calculators on the learning of functions: concepts in precalculus mathematics. *Dissertation Abstracts International, 52* (3), 835-A.

Rocha, H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário.* Lisboa: APM.

Rocha, H. (2001). Calculadoras gráficas: Que utilização? In *Actas do XII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp.233-252). Lisboa: APM.

Rocha, A. (2002). Os alunos de matemática e o trabalho investigativo. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp.99-124). Lisboa: APM.

Rocha, H. (2008). O professor e a integração da calculadora gráfica no ensino da matemática. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Org.), Tecnologias e educação matemática (pp.163-171). Leiria: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Rodd, M., & Monaghan, J. (2002). School mathematics and mathematical proof. In L. Haggarty (Ed.), *Aspects of teaching secondary mathematics. Perspectives on practice* (pp.71 – 88). London: The Open University.

Romano, E., & Ponte, J. P. (2009). A calculadora gráfica nas práticas dos professores de matemática do 12.º ano. *In Actas do XX Seminário da Investigação em Educação Matemática* (pp.531-540). Braga: Centro de Investigação Em Educação (CIEd).

Ruthven, K. (1990a). The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 431 – 450.

Ruthven, K. (1990b). *Personal technology in the classroom – The NCTE graphic calculators in mathematics Project.* Cambridge: University of Cambridge Department of Education.

Ruthven, K. (1992). Personal technology and classroom change: A British perspective. In C. R. Hirsch (Ed.), *Calculators in mathematics education – 1992 Yearbook* (pp.91-100). USA: NCTM.

Sajka, M. (2003). A secondary school student´s understanding of the concept of function – a case of study. Educational studies of Mathematics, 53, 229 – 254.

Schiguchi, Y., & Miyazaki, M. (2000). Argumentation and mathematical proof in Japan. Retirado em 18 de Junho de 2009 de www.lettredelapreuve.it/Oldpreuve/Newslettre.

Schiguchi, Y. (2002). Mathematical proof, argumentation, classroom communication: From a cultural perspective. *Journal of educational study in Mathematics, 21*, 11-20.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making. In J. F. Voss, D. N. Perkins & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning* (pp.311-343). Hillsdale, N. J. Lawrence Earlbaum Associates.

Segurado, I. (2002). O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas? In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp.57-73). Lisboa: APM.

Semana, S., & Santos, L. (2008). A avaliação e o raciocínio matemático. *Educação e Matemática, 100*, 51-58.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1 -36.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191 – 228.

Silver, E. A., & Smith, M. S. (1996). Building discourse communities in mathematics classroom: A worthwhile but challenging journey. In P. C. Elliott & M. J. Kenney (Eds.), *Communication in Mathematics, k-12 and beyond* (pp.20-28). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 259 – 281.

Stacey, K., & Gooding, A. (1998). Communication and learning in small-group discussions. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Buss & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp.191-206). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Steen, L. A. (1999). Twenty questions about mathematical reasoning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades k-12* (pp.270-285). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 40* (3), 314 – 352.

Tall, D. (1997). Functions and calculus. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., & Nápoles, S. (1998). *Funções: Matemática – 11.º ano de escolaridade.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Toulmin, S. E. (1969). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30* (2), 161-177.

Veloso, E. (1998). Geometria: Temas actuais. Materiais para professores. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24,* 7-24.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. International *Journal of Mathematicatics Education in Science and Technology, 14(3),* 293-305.

Vincent, J., Chick, H., & McCrae, B. (2005). Argumentation profile charts as tools for analyzing students´ argumentations. In Helen L. Chick & Jill L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 4* (pp.281-288). Melbourne: PME.

Waits, B. K., & Demana, F. (1995). Graphing calculator intensive calculus: A first step in calculus reform for all students. In *Proceedings of the Sixth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (pp.351-359). USA: Addison-Wesley Publishing Company.

Weston, A. (1996). *A arte de argumentar.* Lisboa: Gradiva.

Whitenack, J., & Yackel, E. (2008). Construindo argumentações matemáticas nos primeiros anos: A importância de explicar e justificar ideias. *Educação e Matemática, 100*, 85-88.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education, 30* (2), 171-191.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathemathics Education, 27* (4), 258-477.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research companion to principals and standards for school mathematics* (pp.227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Yin, R. K. (1984). Case study research: Design and methods. Newsbury Park, CA: Sage.

Yunkel, L. E. (1995). The power of visualization: The impact of graphing technology on the secondary mathematics curriculum. In D. Thomas (Ed.), *Scientific visualization in mathematics and science teaching* (pp.1-18). Charlottesville, VA: Association for the Advancement of Computing in Education.

Zimmermann, W. (1991). Visual thinking in calculus. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp.127-137). USA: Mathematical Association of America.

ANEXOS

ANEXO 1

Pedido de Autorização ao Director da Escola

Exm.º Sr. Director da Escola…

No âmbito do trabalho para a tese de Mestrado em Ciências da Educação: Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática sob o tema: *"A argumentação matemática na resolução de tarefas com a utilização da calculadora gráfica: Experiência numa turma do 11º ano"*, que frequento na Universidade do Minho, pretendo efectuar gravações áudio/vídeo de secções de trabalho com a turma 11º A na qual exerço o cargo de professora da disciplina de matemática e simultaneamente de directora de turma. O pedido de autorização já foi também devidamente endereçado a todos os encarregados de educação da referida turma. Assim, e em consequência venho solicitar a sua autorização para a realização das referidas gravações.

Braga, 18 de Janeiro de 2010

Atenciosamente,

A professora

Graça Magalhães

ANEXO 2

Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação

Exm.º [a] Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Do(a) aluno(a) ____, nº__, da turma A do 11ºano.

No âmbito do trabalho para a tese de Mestrado em Ciências da Educação: Área de Especialização em Supervisão Pedagógica na Educação Matemática sob o tema: *"A argumentação matemática na resolução de tarefas com a utilização da calculadora gráfica: Experiência numa turma do 11º ano"*, que frequento na Universidade do Minho, pretendo efectuar gravações áudio/vídeo de secções de trabalho com a turma do seu educando. Em consequência venho solicitar a vossa autorização para a realização das referidas gravações.

Braga, 18 de Janeiro de 2010

Atenciosamente,
A professora
Graça Magalhães

Eu,____, Encarregado de Educação do aluno ________________________________, nº_____ do 11ºA autorizo a gravação em vídeo e/ou áudio de aulas da turma da qual o meu educando faz parte.

____

ANEXO 3

Caracterização dos grupos

	Nomes	Caracterização de cada aluno do grupo
Grupo 1	Alexandra	Aluna interessada, empenhada e trabalhadora. No entanto, pouco participativa devido à sua timidez. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 15 valores.
	Elisa	Aluna com muito bom aproveitamento a todas as disciplinas. Muito interessada, empenhada, entusiasmada e participativa. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 19 valores.
	Júlia	Aluna com muitas dificuldades à disciplina de Matemática. No entanto, manteve-se sempre nas aulas muito interessada, esforçada e atenta, mas pouco participativa. A avaliação à disciplina de matemática no final do 10.º ano foi de 10 valores.
	Fausto	Aluno muito alegre e interessado apesar de muito distraído. Evidencia muita dificuldade em estar atento nas aulas, mas é um excelente aluno a Matemática, sendo também muito participativo e de forma correcta. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 17 valores.
Grupo 2	Julieta	Aluna muito distraída e conversadora. A sua colega de carteira em todas as aulas é a Sónia. Apesar da sua distracção, é bastante inteligente e mostra-se interessada e empenhada em aprender Matemática participando em algumas aulas. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 17 valores.
	Luísa	Aluna com algumas dificuldades à disciplina de Matemática, mas muito batalhadora e trabalhadora, nunca deixando passar uma dúvida por esclarecer durante o decorrer de cada aula. Por este motivo, é uma aluna muito participativa e questionadora. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 16 valores.
	Sónia	Aluna muito distraída e conversadora. A sua colega de carteira em todas as aulas é a Julieta. Apesar da sua distracção, é bastante inteligente e mostra-se interessada e empenhada em aprender Matemática participando em algumas aulas. É uma aluna de ideias fixas e não compreende por que é que algumas estão erradas. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 17 valores.
Grupo 3	Célia	Aluna com excelente aproveitamento a todas as disciplinas. Muito interessada, empenhada, entusiasmada e participativa. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 19 valores.
	Margarida	Aluna empenhada, esforçada e trabalhadora apesar de pouco participativa devido a ser um pouco tímida. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 14 valores.
	Raul	Aluno com aproveitamento muito bom a todas as disciplinas. Muito interessado, empenhado, entusiasmado e participativo. No entanto, o facto de ser muito participativo, por vezes, não deixa espaço para os colegas expressarem as suas opiniões. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 17 valores.
Grupo 4	Amélia	Aluna pouco participativa, distraída e com algumas dificuldades na disciplina de matemática. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 10 valores.
	Rafaela	Aluna interessada, esforçada, empenhada e participativa. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 13 valores.
	Conceição	Aluna com muitas dificuldades à disciplina de Matemática. Muito distraída, conversadora e pouco participativa. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 13 valores.
	Flora	Aluna um pouco distraída e pouco participativa. Demonstra algumas dificuldades na disciplina de Matemática, mas tem feito algum esforço para as colmatar. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 12 valores.
Grupo 5	Aurora	Aluna participativa mas um pouco distraída. É empenhada e trabalhadora apesar de por vezes manifestar alguma dificuldade na disciplina de Matemática. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 14 valores.
	Rosa	Aluna repetente com muitas dificuldades na disciplina de Matemática mas esforçada e empenhada. Tenta, na maior parte das aulas, participar de forma activa. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 10 valores.
	David	Aluno muito inteligente mas distraído, conversador e um pouco instável. No entanto, esforçou-se para participar activamente no trabalho do seu grupo. A avaliação à disciplina

		de Matemática no final do 10.º ano foi de 12 valores.
	João	Aluno interessado mas com dificuldades de concentração. Manifestou, ao longo do desenvolvimento do trabalho, interesse e empenho. A avaliação à disciplina de matemática no final do 10º ano foi de 13 valores.
Grupo 6	Afonso	Aluno com muitas dificuldades à disciplina de Matemática. Pouco participativo mas empenhado, interessado e muito educado. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 11 valores.
	Duarte	Aluno muito distraído e preguiçoso. Empenha-se pouco, no entanto é um rapaz com bons princípios. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 11 valores.
	Bruna	Aluna muito activa e comunicadora. Gosta de ajudar os seus amigos e empenhou-se para que o trabalho de grupo corresse bem. No entanto, continua a achar que deveria ter seguido Humanidades, pois o seu forte são as línguas. Apesar de tudo, continua a batalhar no sentido de ultrapassar as suas dificuldades, nomeadamente à disciplina de Matemática. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 13 valores.
Grupo 7	Rui	Aluno repetente com algumas dificuldades na disciplina de Matemática mas esforçado e empenhado apesar de um pouco distraído. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 12 valores.
	Maria	Aluna com algumas dificuldades na disciplina de Matemática mas esforçada e empenhada, no entanto pouco participativa devido a ser um pouco tímida. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 13 valores.
	Dora	Aluna muito responsável, empenhada e esforçada apesar de denotar algumas dificuldades à disciplina de Matemática. Participa activamente na exploração e na discussão em todas as tarefas. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 13 valores.
	Vitória	Aluna de nacionalidade Moldava, no entanto sem dificuldades de entendimento e compreensão da Língua Portuguesa. Muito interessada, esforçada e participativa, especialmente nos momentos de aula em que não entende algum conteúdo matemático que está a ser leccionado. Manifestou, ao longo do desenvolvimento do trabalho, muito entusiasmo e empenho. A avaliação à disciplina de Matemática no final do 10.º ano foi de 12 valores.

ANEXO 4

Introdução às tarefas

Trabalho de Grupo

Na realização do trabalho de grupo é importantes terem em conta os seguintes aspectos:

- Ler atentamente e individualmente o enunciado de cada tarefa;
- Depois de ler, discutir com os restantes elementos do grupo o que cada um percebeu;
- Discutir as estratégias para iniciar a tarefa, explicitando o raciocínio, as conjecturas e as argumentações de cada um;
- Não seguir uma estratégia que não percebe só porque os outros elementos do grupo acham que pode ser assim;
- Registar no caderno quais foram as conjecturas que foram seguidas e quais as que foram abandonadas;
- Registar quais os exemplos e quais os contra exemplos encontrados;
- Registar todo o processo da investigação no caderno;
- Organizar a discussão em grupo turma para que na discussão sejam explicitado todo o processo de investigação e os resultados obtidos.

Discussão em grupo turma

Na discussão em grande grupo devem ter em conta os seguintes aspectos:

- Estar atentos à explicação dos restantes colegas da turma;
- Questionar os colegas caso não percebem o que disseram;
- Fazer sugestões indicando o que pensam que está mal, explicitando e pedindo para melhorar;
- Explicar com cuidado e na vossa vez como chegaram aos resultados de modo que todos compreendam como fizeram.

Elaboração do relatório

O relatório deve ser realizado para que nele conste a descrição pormenorizada de todo o processo de investigação, nomeadamente:

- Os raciocínios efectuados;
- As conjecturas seguidas e as abandonadas, argumentando sobre o porquê das tuas opções;
- As conclusões a que chegas-te e se os argumentos apresentados são suficientes para constituírem uma prova para a família de funções apresentada.

No relatório deve também constar uma apreciação crítica da actividade, assim como uma apreciação autocrítica de cada elemento do grupo na sua intervenção no trabalho desenvolvido.

ANEXO 5

Sequência de Tarefas

Tarefas de Investigação com recurso à calculadora gráfica

TEMA: Funções Racionais

Tarefa 1

Investiga como varia o gráfico da função $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ em que $f(x)=ax+b$, com $a,b\in IR$. Faz as tuas conjecturas para generalizares como varia o gráfico da função inversa de qualquer função afim.

Nota: A função $g(x)$ é função inversa da função $f(x)$.

Tarefa 2

Investiga como varia a função $f(x)=a+\frac{b}{cx+d}$, com $a,b,c,d\in IR$, procurando perceber qual o efeito de cada um dos parâmetros no comportamento gráfico da função.

Tarefa 3

Seja $f(x)=\frac{k}{ax^2}$, com $a,k\in IR$. Considera a família de funções $g(x)=f(x-h)$, $h\in$ IR. Investiga como varia o gráfico da função g em relação ao gráfico da função f procurando perceber qual o efeito de cada um dos parâmetros no comportamento gráfico da função.

Tarefa 3

Considera os rectângulos que verificam as seguintes propriedades:

- O perímetro é numericamente igual à área;
- As medidas de comprimento dos lados do rectângulo são números naturais.

Determina as dimensões de todos os rectângulos que verificam as condições dadas.

ANEXO 6

Planificação das tarefas

Aulas observadas (Blocos de 90 minutos)	Tarefa	Trabalho desenvolvido
2/02/2010	Tarefa 1	• Trabalho de grupo
3/02/2010		• Conclusão do trabalho de grupo – 1ª parte da aula • Discussão na turma – 2ª parte da aula
8/02/2010	Tarefa 2	• Trabalho de grupo
9/02/2010		• Conclusão do trabalho de grupo – 1ª parte da aula • Discussão na turma – 2ª parte da aula
10/02/2010	Tarefa 3	• Trabalho de grupo – 1ª parte da aula • Discussão na turma – 2ª parte da aula
22/02/2010	Tarefa 4	• Trabalho de grupo
23/02/2010		• Conclusão do trabalho de grupo – 1ª parte da aula • Discussão na turma – 2ª parte da aula

ANEXO 7

Aplicação das tarefas

<table>
<tr><th>Aulas observadas
(Blocos de 90 minutos)</th><th>Tarefa</th><th>Trabalho desenvolvido</th></tr>
<tr><td>2/02/2010</td><td rowspan="3">Tarefa 1</td><td>• Trabalho de grupo</td></tr>
<tr><td>3/02/2010</td><td>• Conclusão do trabalho de grupo – 1ª parte da aula e inicio da 2ª parte
• Discussão na turma – na parte final da aula</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8/02/2010</td><td>• Conclusão da discussão na turma – 1ª parte da aula</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Tarefa 2</td><td>• Trabalho de grupo – 2ª parte da aula</td></tr>
<tr><td>9/02/2010</td><td>• Conclusão do trabalho de grupo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">10/02/2010</td><td>• Discussão na turma – 1ª parte da aula</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Tarefa 3</td><td>• Trabalho de grupo – 2ª parte da aula</td></tr>
<tr><td>22/02/2010</td><td>• Conclusão do trabalho de grupo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">23/02/2010</td><td>• Discussão na turma – 1ª parte da aula</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tarefa 4</td><td>• Trabalho de grupo – 2ª parte da aula</td></tr>
<tr><td>24/02/2010</td><td>• Conclusão do trabalho de grupo – 1ª parte da aula
• Discussão na turma – 2ª parte da aula</td></tr>
</table>